Andrea Lubberdink

Een eerste les aan de brugklas
Kennismaken met wiskunde aan de hand van het pentagram

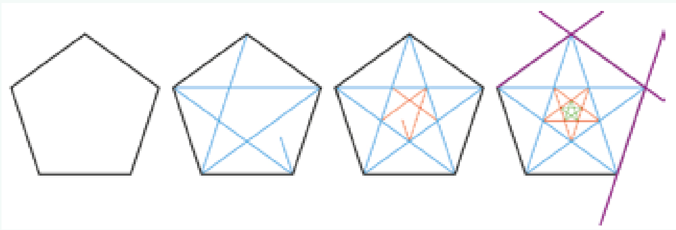
Brugklassers maken voor het eerst kennis met wiskunde. Hoe maak je duidelijk wat wiskunde is? Het pentagram leent zich goed voor een eerste kennismaking. Leerlingen gaan op zoek naar regelmaat, congruente figuren en verhoudingen. Pythagoras komt ook voorbij. Andrea Lubberdink beschrijft haar les over pentagrammen en deelt het lesmateriaal.

Inleiding

Een nieuw schooljaar. De brugklas komt binnenlopen voor de allereerste wiskundeles. Open, nieuwsgierige gezichten. Wat zouden we gaan doen? Wat is wiskunde eigenlijk? Het is anders dan rekenen, maar wat is er dan anders aan? Ga ik dit leuk vinden?
Zo geïnteresseerd en verwachtingsvol als in de eerste les krijg je de leerlingen niet snel weer. Dit is de kans om een indruk te geven die ze niet snel zullen vergeten. In dit artikel laat ik zien langs welke lijn de bijzondere eigenschappen van het pentagram stap voor stap door de leerlingen zelf onderzocht en ontdekt kunnen worden. [1] [2]

Pentagrammen tekenen in een regelmatige vijfhoek

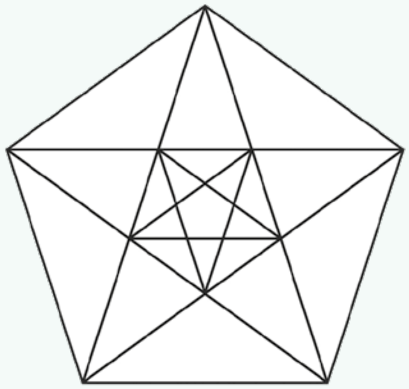
In de eerste wiskundeles vinden leerlingen het spannend om meteen hun nieuwe geodriehoek te mogen gebruiken. Ze krijgen de opdracht om in een regelmatige vijfhoek de hoekpunten te verbinden. Ze zien een ster ontstaan, een pentagram, en dat is leuk. Nog leuker is het om te ontdekken dat de binnenkant van het pentagram weer een regelmatige vijfhoek is, zie figuur 1. Je kunt dus opnieuw hoekpunten verbinden. En opnieuw en opnieuw... Hoe lang kun je doorgaan? Maar als je steeds kleinere pentagrammen kunt tekenen, dan moet je ook de andere kant op kunnen en een groter pentagram kunnen tekenen. Maar welke lijnen moet je dan trekken? De eerste moeilijkheid. Op gevoel gaan tekenen gaat in dit geval altijd fout. De ster wordt altijd te klein en te krom. Je moet naar het patroon binnenin kijken om te ontdekken hoe je het patroon uitbreidt. Goed gedaan als je hebt gevonden hoe het moet. En daarna kan het patroon natuurlijk nog verder uitgebreid worden en verder, maar dat past niet meer op het papier. Is het papier eigenlijk wel nodig? Of is het genoeg dat we de figuur ook steeds groter kunnen denken?



figuur 1

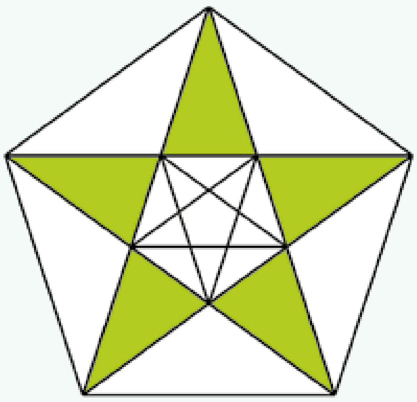
Congruente en gelijkvormige driehoeken

Na het zelf tekenen van de pentagrammen kan de aandacht gericht worden op de andere symmetrische aspecten van het pentagram en van de figuur met twee pentagrammen in een vijfhoek, zie figuur 2.



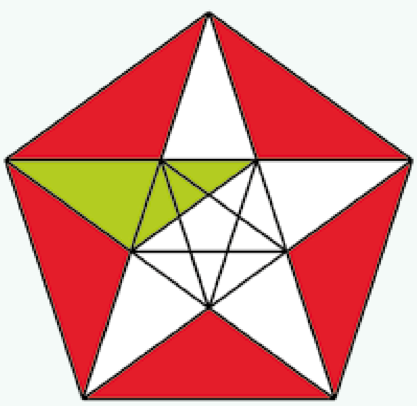
figuur 2 De figuur waar de leerlingen mee werken

De leerlingen werken verder (op werkbladen) met deze figuur. Welke vouwlijn kun je maken zodat de figuur 'op zichzelf vouwt' en hoe kun je hem draaien totdat hij weer op zichzelf valt? Een mooie gelegenheid om de termen lijnsymmetrie, draaisymmetrie en puntsymmetrie (dit laatste heeft de figuur niet) te laten vallen. De termen lijnstuk en hoek kunnen al zijn uitgelegd bij de introductie van de regelmatige vijfhoek en de (gelijkbenige) driehoek komt nu aan bod. In de figuur kun je congruente driehoeken vinden. Meer dan je denkt. Vind vier verschillende paren gelijkvormige driehoeken en kleur ze in. Die zijn niet moeilijk te vinden.



figuur 3 Vijf congruente driehoeken. Waar is de zesde?

Maar dan komt de vraag om in een figuur er niet twee, maar zes, te vinden die congruent zijn. In figuur 3 zijn er vijf te zien. Waar is de zesde? De ontdekking van de zesde vinden de leerlingen vaak een verrassing. En is er dan ook een zevende? Hoeveel zijn er maximaal? En kun je ook zes congruente driehoeken van een andere soort vinden? Leerlingen ontdekken steeds meer mogelijkheden en kleuren congruente driehoeken op hun werkblad in. Er zijn vier verschillende driehoeken die meer dan vijf congruente driehoeken hebben in de figuur. In figuur 4 zie je een voorbeeld van zes congruente driehoeken.



figuur 4 Zes congruente driehoeken. Vind nog zes andere en nog twee keer zes andere.

De figuur barst ook van de gelijkvormige driehoeken. Hoeveel verschillende gelijkvormige driehoeken van elke soort kun je vinden? Weer zijn er veel en steeds nieuwe te ontdekken, als je langer blijft proberen. Er zijn in één figuur in totaal vijf driehoeken die gelijkvormig zijn met de driehoeken in figuur 3 en in totaal vier driehoeken die gelijkvormig zijn met de driehoeken in figuur 4.

Het pentagram

Het zelf ontdekken van de bijzondere eigenschappen van het pentagram is extra leuk als deze les is voorafgegaan door het verhaal over het ontstaan en de ontwikkeling van de wiskunde, waarin het pentagram als teken van de Pythagoreeërs (de aanhangers van Pythagoras) naar voren is gekomen. Dat verhaal staat uitgeschreven op de PowerPoint. Ook kan er vooraf of achteraf stilgestaan worden bij de tegenwoordige associaties met het pentagram, als teken van de duivel of van mensen die zich heksen noemen, of gewoon als een teken dat veel mensen heel erg mooi vinden. Wat is er dan zo bijzonder en magisch aan het pentagram?

De gulden snede en magie

Alle lijnen in de figuur snijden elkaar volgens de gulden snede. Aandacht daarvoor wordt te veel voor de eerste les van de brugklas, maar op een later moment, bijvoorbeeld als eerste les in klas 2, of als verdiepingsles, kan het onderzoeken in de figuur een vervolg krijgen in de volgende lijn.

Meet de lengte van alle verschillende lijnstukken in de figuur. Rangschik de lengtes van klein naar groot en bereken steeds het quotiënt van opeenvolgende lengtes, de langere gedeeld door de kortere. Ontdek dat er altijd ongeveer 1,6 uitkomt. Dat betekent dat een lijnstuk dat één maatje groter is, steeds ongeveer 1,6 keer zo groot is als het vorige lijnstuk.

We hebben 1,6 gevonden, maar dat is niet het precieze getal. Het precieze getal kun je met meten niet vinden. Waarom niet? Het precieze getal is een beroemd getal. Het heet het getal van de gulden snede en wordt vaak aangegeven met φ. Het is 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917 52126633862 ... en dit zijn nog lang niet alle cijfers achter de komma. Er zijn er namelijk nog oneindig veel. Toen Pythagoras al niet meer leefde bleven zijn volgelingen nog wel wiskunde doen. Ze schrokken erg van het getal uit hun eigen pentagram waarvan je nooit alle decimalen achter de komma kunt weten. (Waarom niet?)

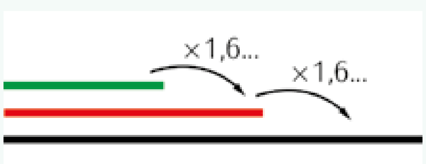
>

Ze schrokken zo erg dat ze bang werden voor getallen en waarschijnlijk ook voor hun eigen pentagram. Het leek wel een magische figuur. Waarschijnlijk is dat de reden dat er nu nog steeds mensen zijn die geloven in magie of duistere krachten achter deze figuur.

Ontdekking van irrationale getallen

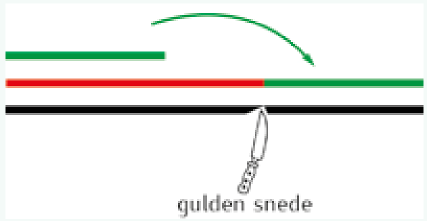
De Pythagoreeërs deden de schokkende ontdekking van een getal dat je nooit in z'n geheel kunt kennen, toen ze probeerden de grootste gemeenschappelijke deler te vinden (met het algoritme van Euclides) van de lengten van twee opeenvolgende lijnstukken in de figuur.[3] Hierover in een volgend artikel wellicht meer. De ggd bleek niet te vinden (doordat de figuur zich naar binnen toe steeds herhaalt) maar twee gehele getallen hebben altijd een ggd. De Pythagoreeërs kenden alleen gehele getallen (en verhoudingen) en deze tegenspraak was dus zeer mysterieus en in eerste instantie onoplosbaar. We kunnen het nu zien als een ontdekking van irrationale getallen, waarschijnlijk zelfs de eerste en ongeveer in dezelfde tijd als de beroemde ontdekking van de irrationaliteit van de verhouding van twee zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

In de wiskunde vinden we tegenwoordig het pentagram een mooie, symmetrische figuur en getallen met oneindig veel cijfers achter de komma vinden we heel gewoon. Er zijn zelfs oneindig veel van die getallen. Er zijn er zelfs meer van dan getallen die niet oneindig veel cijfers achter de komma hebben. Zelfs oneindig keer zoveel meer ... toch wel magisch ...



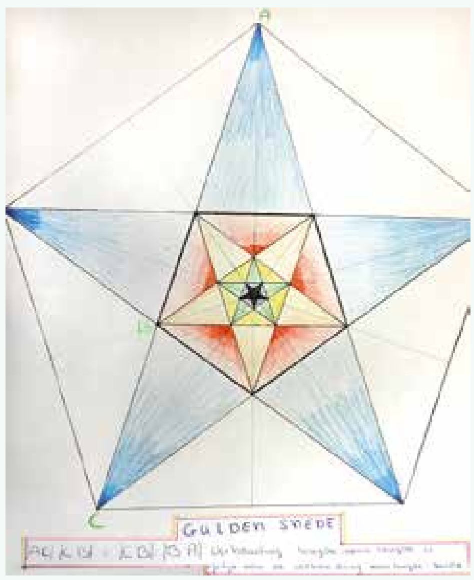
figuur 5 Als steeds langere lijnstukken precies zo zijn dat ze telkens 1,6... keer zo lang zijn als de vorige ...

Het getal 1,6... heet het getal van de gulden snede omdat het een extra mooie eigenschap heeft. Als steeds langere lijnstukken precies zo zijn dat ze telkens 1,6... keer zo lang zijn als de vorige, zoals in figuur 5, dan passen twee kleinere lengtes precies in één grotere, zoals je ziet in figuur 6.



figuur 6 ... dan passen twee kleinere lengtes precies in één grotere.

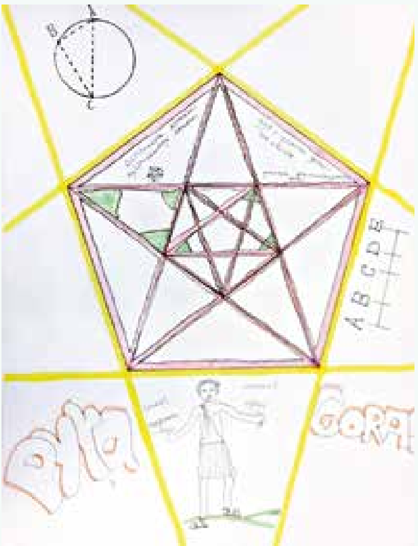
Geldt dat inderdaad voor de lijnstukken in het pentagram? De leerlingen beamen dat meteen, want dat hebben ze gezien tijdens het meten van de lengtes van de verschillende lijnstukken. Als creatieve afsluitende opdracht kan de leerlingen gevraagd worden een poster te maken van de figuur, waarin de bijzondere wiskundige eigenschappen naar voren komen. Leerlingen reflecteren daardoor op het geleerde en vinden het leuk om creatief op hun eigen manier te werk te mogen gaan.



Geschikt voor elk niveau en elk moment

De les is hier beschreven als een eerste les aan de brugklas (met een vervolgles), maar kan ook op een ander moment gegeven worden in elke onderbouwklas. Het materiaal is geschikt voor elk niveau, natuurlijk met weglatingen of toevoegingen naar eigen inzicht van de docent. In klas 3 havo/vwo kan ook de berekening van de exacte waarde van φ behandeld worden, door het oplossen van de vergelijking $1 + \varphi = \varphi \cdot \varphi$ die je krijgt door (in figuur 5 en figuur 6) voor twee opeenvolgende lengtes

1 en φ te nemen (de som van die twee lengtes is dan gelijk aan φ keer de langste, dus φ·φ).



Veel plezier met het materiaal!

De werkbladen en de PowerPoints vind je op:
vakbladeuclides.nl/966pentagram_werkbladen
vakbladeuclides.nl/966pentagram_Powerpoint1
vakbladeuclides.nl/966pentagram_Powerpoint2

Noten

[1] De les (het zijn eigenlijk drie lessen) is een vereenvoudigde en aangepaste versie van getallendag, zie *lublub.nl/getallendag*, die is voortgekomen uit onderzoek voor de eindopdracht van het college Historical Aspects of Classroom Mathematics van Steven Wepster.

[2] zie *https://lublub.nl/pentagram*.

[3] Fritz, K. von. (1945). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, *Vol*(46), pp. 242-264 en Jones, P.S. (1956). Irrationals or Incommensurables I: Their Discovery, and a 'Logical Scandal'. *Mathematics Teacher*(49), pp 123-127 en Waerden, B.L. van der.(1950). *Ontwakende wetenschap, Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde*. Groningen: Noordhoff N.V., p. 113.

Over de auteur

Andrea Lubberdink is docent wiskunde aan het Utrechts Stedelijk Gymnasium en heeft een achtergrond in de geschiedenis en filosofie van de wetenschap. Website: *https://lublub.nl* E-mailadres: *andrea@lublub.nl*