De individualiseerbaarheid van identieke deeltjes

door Andrea Lubberdink

Oktober 1998

Inhoud

inleiding

Protonen, elektronen, fotonen, hadronen, bosonen en quarks zijn termen die veelvuldig gebruikt worden in de quantummechanica. Ze verwijzen allemaal naar deeltjes. Door de manier waarop erover gesproken en in de literatuur geschreven wordt wekken ze vaak de indruk gezien te kunnen worden als de bouwstenen van de materiële werkelijkheid. Maar de bewering dat de materiële werkelijkheid is opgebouwd uit deeltjes is vanwege de implicaties van dezelfde quantummechanica zeer problematisch.

Ten eerste is er de vraag of er wel zoiets is als een materiële werkelijkheid waar we eigenschappen aan toe kunnen kennen onafhankelijk van een meting of waarneming. Verschillende interpretaties van de quantummechanica geven hierop verschillende antwoorden en in deze scriptie ga ik hier niet verder op in.

Het tweede grote probleem betreft de term deeltje. Het is niet altijd duidelijk wat met deze term bedoeld wordt. Een quantummechanisch deeltje is in ieder geval niet hetzelfde als een klassiek deeltje.

Een klassiek deeltje heeft immers een welbepaalde plaats en impuls, waarmee de toestand van het deeltje is vastgelegd. In de quantummechanica is het niet onomstreden over eigenschappen, zoals het zich bevinden op een bepaalde plaats en het hebben van een bepaalde impulswaarde, te spreken. Hoe dan ook wordt het hebben van zo'n eigenschap in ieder geval het dichtst benaderd als een 1-deeltjestoestand een eigentoestand is van de bij de eigenschap behorende operator, in dit geval de plaats- of impulsoperator. Een quantumtoestand kan nooit een eigenfunctie zijn van zowel de plaats, x, als de impuls, p, omdat p en x via een fourier-transformatie met elkaar zijn verbonden. Er geldt immers $p = \hbar.k$ (met $\hbar$ de constante van Planck gedeeld door 2π en k het golfgetal) en k is rechtstreeks verbonden met x via een fourier-transformatie.

Quantummechanische deeltjes, die zoals klassieke deeltjes een welbepaalde plaats en impulswaarde hebben komen dus niet voor. Er wordt wel gesproken over een golf-deeltje dualiteit. De term deeltje wordt dan gekoppeld aan een quantumtoestand die een eigenfunctie is van x en de term golf aan een quantumtoestand die een eigenfunctie is van k. Meestal is een quantumtoestand niet een eigenfunctie van x of k. Omdat k en x via een fourier-transformatie met elkaar zijn verbonden, betekent een grotere spreiding in de eigenwaarden van x een kleinere spreiding in de eigenwaarden van k en omgekeerd. Men kan zo spreken over een quantumtoestand die ofwel meer een deeltjeskarakter ofwel meer een golfkarakter heeft.

Door deze golf-deeltje dualiteit is er dus al een probleem met de term deeltje in een quantummechanisch 1-deeltjessysteem. Dit probleem is in de literatuur al veel besproken en ik zal er hier alleen nog over opmerken dat binnen de quantummechanica wel duidelijk is wat bedoeld wordt met de term deeltje in een 1-deeltjessysteem of in een systeem waarin geen deeltjes van dezelfde soort voorkomen. Het deeltje is daarin namelijk datgene waarvan de toestand beschreven wordt in een bepaalde 1-deeltjeshilbertruimte.

Behalve het probleem van de golf-deeltje dualiteit, doen zich nog meer problemen voor met de term deeltje als deze gebruikt wordt bij de beschouwing van quantummechanische systemen met meer deeltjes van dezelfde soort. Deze deeltjes worden in de literatuur 'identieke deeltjes' of 'ononderscheidbare deeltjes' genoemd. We kunnen hierover in de literatuur het volgende tegenkomen.

De toestand van een deeltje is gegeven door het partiële spoor naar een 1-deeltjeshilbertruimte. Omdat de toestanden van identieke deeltjes, wegens het symmetriseringspostulaat, gesymmetriseerd zijn en voor gesymmetriseerde toestanden de partiële sporen gelijk zijn, zijn de toestanden van alle identieke deeltjes gelijk. Deze deeltjes kunnen in niets van elkaar onderscheiden worden. Behalve dat ze dezelfde waarde hebben voor hun massa, lading, spin en dergelijke, bevinden ze zich ook in exact dezelfde toestand. Dit wordt uitvoeriger behandeld in hoofdstuk 1.

We kunnen de hierboven beschreven deeltjes 'niet individualiseerbare' deeltjes noemen. Omdat het symmetriseringspostulaat voor alle identieke deeltjes geldt, kunnen we uit het bovenstaande opmaken dat alle identieke deeltjes niet individualiseerbaar zijn. Een niet individualiseerbaar deeltje kan niet een specifiek kenmerk hebben dat alle andere deeltjes niet hebben, zoals dat het gedetecteerd is. In feite kan men dus bijvoorbeeld niet spreken van een bepaald elektron dat, nadat het de deeltjesversneller verlaten heeft, een scherm raakte.

Dergelijke uitspraken waarin naar elektronen wordt verwezen alsof het individualiseerbare deeltjes zijn, zijn echter wel geaccepteerd en veel gebruikt binnen de quantummechanica. Er is dus een tegenstrijdigheid in het deeltjesconcept dat in de quantummechanica wordt gehanteerd.

Veel beoefenaars van de quantummechanica zullen hierop reageren door te zeggen dat ononderscheidbare deeltjes alleen de deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem zijn en dat bijvoorbeeld gedetecteerde deeltjes daar niet toe behoren en dus niet ononderscheidbaar zijn. Anderen zullen reageren door te zeggen dat het inderdaad in feite zo is dat alle identieke deeltjes ononderscheidbaar en dus niet individualiseerbaar zijn, maar dat het meestal geen problemen oplevert als er toch over deeltjes gesproken wordt alsof ze wel individualiseerbaar zijn. De individualiseerbare deeltjes zijn dan een soort benadering van de niet individualiseerbare deeltjes.

Beide oplossingen vind ik niet bevredigend. In deze scriptie zal uitgebreid besproken worden waarom niet. Ook zullen termen, zoals 'ononderscheidbaarheid', 'veeldeeltjessysteem' en 'individualiseerbaarheid', die in de literatuur veel gebruikt worden, maar waarvan het niet altijd precies duidelijk is wat ermee bedoeld wordt, goed gedefiniëerd of niet meer gebruikt worden. Heel summier zal ik hier alvast mijn bezwaren tegen beide oplossingen samenvatten.

De eerste oplossing vind ik niet acceptabel omdat, als gesteld wordt dat identieke deeltjes alleen binnen een veeldeeltjessysteem ononderscheidbaar zijn, dan zou het symmetriseringsvoorschrift ook alleen binnen een veeldeeltjessysteem moeten gelden. Voor een postulaat van de quantummechanica lijkt het mij aannemenlijker dat het geldt voor alle identieke deeltjes en niet alleen die binnen een veeldeeltjessysteem.

Over de tweede oplossing kan ik zeggen dat ik de niet individualiseerbaarheid van alle identieke deeltjes een zeer ongewenste eigenschap van quantummechanische deeltjes vind. Het wordt erg gecompliceerd of onmogelijk te communiceren over uitkomsten van experimenten als bijvoorbeeld een gedetecteerd elektron niet als zodanig benoemd mag worden. Overigens is mij niet duidelijk waarom er dan toch wel in bepaalde gevallen over individuele deeltjes gesproken zou mogen worden. Ik zie niet hoe er een benadering te maken is van niet individualiseerbare deeltjes die allemaal in dezelfde gemengde toestand zitten naar deeltjes die alle in een verschillende zuivere toestand zitten.

Om voor mezelf duidelijkheid te krijgen in het hierboven beschreven probleem omtrent de individualiseerbaarheid van identieke deeltjes heb ik deze scriptie geschreven. Vooral het idee dat alle deeltjes in feite niet individualiseerbaar zijn kan aanleiding geven tot allerlei filosofische speculaties en visualisaties. Het kan bijvoorbeeld onduidelijke beelden oproepen van 'deeltjes die overal een beetje zijn en verspreid zijn over het gehele universum, of ideeën over 'deeltjes die als het ware met elkaar verbonden zijn door hun gemeenschappelijke toestand'. Het is toch belangrijk eerst na te gaan of er wel een goede grond is voor dergelijke beelden of ideeën.

De quantummechanica is een theorie die, door het indeterministische karakter ervan, het onzekerheidsprincipe en het meetprobleem veel verwondering oproept en uitnodigt tot filosoferen over de meest uiteenlopende mogelijke wereldbeelden. Er wordt, door de stellingname dat alle identieke deeltjes niet individualiseerbaar zijn, mijns inziens onnodig een extra mysterie toegevoegd aan de quantummechanica. In deze scriptie zal ik aantonen dat de eventuele niet-individualiseerbaarheid van quantummechanische deeltjes een klassiek analogon heeft en dus niet specifiek kenmerkend is voor de quantummechanica.

Ik hoop in deze scriptie allereerst een duidelijk beeld te geven van de verschillende deeltjesconcepten die er in de quantummechanica gehanteerd worden en de problemen die eraan kleven. Dit gebeurt in hoofdstuk 1 en 2.

Hierboven zijn twee oplossingen besproken van het probleem dat alle identieke deeltjes niet individualiseerbaar zijn, terwijl er toch over deze deeltjes gesproken wordt alsof ze wel individualiseerbaar zijn. Bij de bespreking en het verwerpen van de eerste oplossing speelt de formulering van het symetriseringsvoorschrift een grote rol. In hoofdstuk 3 zullen daarom verschillende formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift onderscheiden en geëvalueerd worden, waarna de eerste oplossing meer formeel en misschien overtuigender verworpen kan worden.

Het verwerpen van de tweede oplosssing wordt ondersteund door een analogie in de individualiseerbaarheid van klassieke en quantummechanische deeltjes. Deze analogie wordt zichtbaar in hoofdsuk 4, waarin een gemodificeerde klassieke mechanica wordt geïntroduceerd, en uitgebreid besproken in hoofdstuk 5.

In hoofdstuk 5 wordt aangetoond dat er ook klassiek niet individualiseerbare deeltjes gedefiniëerd zouden kunnen worden.

In de klassieke mechanica zijn deeltjes echter op een andere manier gedefiniëerd, zodat ze wel individualiseerbaar zijn. In dit hoofdstuk worden quantummechanische deeltjes dan ook anders gedefiniëerd op een manier die analoog is aan de definiëring van klassieke deeltjes. De toestand van een quantummechanisch deeltje is dan niet meer gegeven door het partiële spoor naar een 1-deeltjeshilbertruimte, maar door een 1-deeltjestoestand die deel uitmaakt van de toestand van het systeem. Hierdoor zijn quantummechanische deeltjes niet meer altijd niet-individualiseerbaar. Dit lost het probleem op dat er bijvoorbeeld niet meer over een bepaald gedetecteerd elektron gesproken zou kunnen worden.

De manier waarop deeltjes in deze scriptie gedefiniëerd zullen worden, komt overeen met de manier waarop er in de literatuur meestal al met deeltjes gewerkt wordt. Het is dus niet nieuw. De bijdrage van deze scriptie is, naast het evalueren van de verschillende in de quanummechanica gebruikte deeltjesconcepten, het verwerpen van de definitie van de toestand van een deeltje als gegeven door het partiële spoor naar een 1-deeltjeshilbertruimte. Deze definitie wordt in de literatuur vaak gebruikt.

In de literatuur kan ook gevonden worden dat de toestand van een deelsysteem gegeven is door het partiële spoor te nemen naar een subhilbertruimte van het systeem. In het verlengde van het bovenstaande wordt in hoofdstuk 6 ook dit verworpen. Dit heeft consequenties voor de stelling, die ook in de literatuur gevonden kan worden, dat in het algemeen de toestand van een systeem een gemengde toestand is.

De in deze scriptie voorgestelde definitie van deeltjes is zeker niet onproblematisch. Alleen in het geval dat de evolutie van een quantummechanisch systeem in goede benadering ook met behulp van de klassieke mechanica beschreven zou kunnen worden, is het deeltjesconcept onproblematisch. Dit illustreert mijns inziens dat een deeltjesconcept in de quantummechanica eigenlijk niet thuishoort. Dit is een gevolg van de uitgebreidheid van de golffunctie.

Omdat echter het benoemen van objecten of delen daarvan (nog) een essentieel onderdeel vormt van de manier waarop wij onze waarnemingen uitdrukken, hebben wij individualiseerbare deeltjes, die corresponderen met deze (delen van) objecten, nodig om onze waarnemingen over de uitkomsten van een experiment uit te drukken. Het gedrag van direkt waarneembare objecten kan, behalve met behulp van de quantummechanica ook meestal in zeer goede benadering met behulp van de klassieke mechanica beschreven worden en dus in termen van deeltjes die corresponderen met de waarneembare objecten of delen daarvan. Met het in deze scriptie voorgestelde deeltjesconcept wordt er analoog hieraan in de quantummechanica een logisch verband gelegd tussen de waarneembare objecten en theoretische termen.

Er is theoretisch geen enkele noodzaak de term deeltje in te voeren in de quantummechanica. Het definiëren van deze term is dan ook puur pragmatisch. Zouden we namelijk bij de beoefening van de quantummechanica in het geheel geen gebruik maken van de term deeltje dan zouden we in feite ook bij het uitdrukken van onze waarnemingen bij experimenten geen gebruik kunnen maken van het benoemen van objecten, als we een verband willen leggen tussen de uitkomst van een theoretische berekening en die van een experiment. In de theorie komt dan immers niets voor dat correspondeert met een object. Een stip op een scherm kunnen we dan bijvoorbeeld niet meer relateren aan de detectie van een deeltje. Dit maakt de beoefening van de quantummechanica mijns inziens onmogelijk, in ieder geval zolang de mensheid geen andere algemeen aanvaarde manier heeft om zijn waarnemingen uit te drukken.

De term deeltje, zoals die in deze scriptie wordt gedefiniëerd, sluit aan bij de manier waarop wij onze waarnemingen uitrukken. Voor direkt waarneembare objecten is het deeltjesconcept in benadering onproblematisch. Het feit dat het deeltjesconcept in het algemeen helemaal niet onproblematisch is toont aan dat de deeltjes of objecten die wij waarnemen alleen in benadering de ideale deeltjes of objecten zijn die wij ons erbij voorstellen. We kunnen hieruit als conclusie trekken dat deeltjes in werkelijkheid dus niet bestaan. Zolang we echter deze deeltjes nog heel handig vinden om onze waarneming mee uit te drukken is het zinvol en noodzakelijk een deeltjesconcept in de quantummechanica te definiëren dat hiermee overeenstemt.

1. problemen rond de term deeltje in quantummechanische systemen met identieke deeltjes

1.1 inleiding

Wil men individuele deeltjestoestanden in een systeem van identieke deeltjes introduceren, dan brengt dit veel problemen met zich mee, zoals we in de volgende paragrafen zullen zien. Er is dan ook door Dieks in [1] geopperd dat een quantum-toestand beter niet in termen van deeltjes geïnterpreteerd kan worden, maar dat de toestanden van de quantummechanica serieus genomen moeten worden en corresponderen met de verschillende toestanden waarin de wereld (of een ander systeem) kan zijn. Als we er vanuit gaan dat de quantummechanica compleet is, wat we in deze scriptie zullen doen, dan is dit een onweerlegbare uitspraak, daar een systeem in dat geval volledig beschreven wordt door zijn quantumtoestand en theoretisch geen interpretatie nodig heeft.

Toch wordt de term deeltje in de toepassing van de quantummechanica, ondanks de problemen eraan, veelvuldig gebruikt. In deze scriptie zal ik bespreken waarom en de mogelijkheid onderzoeken om de term deeltje in de quantummechanica op een eenduidige en zinvolle manier te gebruiken.

Zoals gezegd doen zich bij de introductie van individuele deeltjestoestanden in systemen van identieke deeltjes grote problemen voor. Ik zal deze aanduiden met correlatieproblemen en individualisatieproblemen. Deze zijn onder meer beschreven door Dieks in [1]. Aan de hand hiervan zal ik ze in de volgende twee paragrafen beschrijven.

1.2 het correlatieprobleem

Het correlatieprobleem betreft het verschijnsel dat individuele deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem elkaar lijken aan te trekken of af te stoten zonder dat daar een aanwijsbare oorzaak voor is.

Dit verschijnsel treedt op binnen een gegeven toestand van een veeldeeltjessysteem. Bijvoorbeeld in een twee-deeltjessysteem kan de kans op detectie van beide deeltjes op twee plaatsen a en b, die heel dicht bij elkaar zijn, kleiner zijn dan het produkt van de kansen om een deeltje op plaats a te detecteren en een deeltje op plaats b te detecteren. Een voorbeeld hiervan wordt gegeven in [1]. Daarin worden twee impulseigentoestanden in 1 dimensie beschouwd. Deze zijn in plaatsrepresentaie evenredig met

$$e^{ipx/\hbar} \quad \text{en} \quad e^{ip'x/\hbar}$$

Een eenvoudige produkttoestand zou een onafhankelijke uniforme kansverdeling geven voor de plaats van de twee deeltjes. Echter in de gesymmetriseerde toestand evenredig met:

$$e^{ipx/\hbar} \, . \, e^{ip'x'/\hbar} \pm e^{ip'x/\hbar} \, . \, e^{ipx'/\hbar}$$

is de kans om een deeltje op plaats a en het andere op plaats b te detecteren evenredig met:

$$1 \pm \cos\left\{\frac{1}{\hbar}(p-p')(a-b)\right\}$$

met het plus- of minteken voor de symmetrische respectievelijk anti-symmetrische toestand.

Het verschijnsel dat deeltjes elkaar lijken aan te trekken of af te stoten treedt ook op in een veeldeeltjessysteem waarop Bose-Einstein of Fermi-Dirac statistiek kan worden toegepast. Er is dan een uniforme kansverdeling over bepaalde quantum-toestanden. Omdat deze symmetrisch of anti-symmetrisch zijn behoren bijvoorbeeld situaties waarbij twee deeltjes verwisseld zijn tot dezelfde toestand. Er is daardoor niet voor elk deeltje een uniforme kansverdeling over de mogelijke 1-deeltjestoestanden. Als men aan elke 1-deeltjestoestand een deeltje wil koppelen dan moet men concluderen dat bosonen, waarvan de toestand altijd symmetrisch is, elkaar aantrekken en fermionen, waarvan de toestand altijd anti-symmetrisch is, elkaar afstoten. Dit zal ik verduidelijken met het volgende voorbeeld van een systeem dat uit twee bosonen bestaat met als mogelijke 1-deeltjestoestanden $|a\rangle$ en $|b\rangle$, die orthogonaal zijn. De mogelijke toestanden van het systeem zijn $|a\rangle\ |a\rangle$, $|b\rangle\ |b\rangle$, en $|a\rangle\ |b\rangle + |b\rangle\ |a\rangle$. De kans op elke toestand is 1/3. Associëren we nu met elke 1-deeltjestoestand een deeltje, dan kan het bovenstaande in woorden uitgedrukt worden als volgt. De kans dat beide deeltjes in toestand $|a\rangle$ zitten is 1/3, de kans dat beide deeltjes in toestand $|b\rangle$ zitten is 1/3 en de kans dat deeltje 1 in toestand $|a\rangle$ zit en deeltje 2 in toestand $|b\rangle$ of deeltje 2 in toestand $|a\rangle$ en deeltje 1 in toestand $|b\rangle$ is 1/3. Als beide deeltjes onafhankelijk van elkaar waren en de kansverdeling van hun toestand uniform verdeeld was over toestanden $|a\rangle$ en $|b\rangle$ dan was de kans dat beide deeltjes in toestand $|a\rangle$ zitten gelijk aan 1/4 en de kans dat deeltje 1 in toestand $|a\rangle$ zit en deeltje 2 in $|b\rangle$ ook 1/4 en de beide overige kansen ook 1/4. De kans dat beide deeltjes in dezelfde toestand zitten is dus groter dan wanneer beide deeltjes onafhankelijk zouden zijn. De bosonen lijken elkaar dus aan te trekken.

1.3 het individualisatieprobleem

Het individualisatieprobleem treedt op in een systeem waarvan de toestand symmetrisch of anti-symmetrisch is. Beschouw de gesymmetriseerde toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle\right)$$

de bijbehorende dichtheidsoperator is

$$W = \frac{1}{2}\left\{|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \pm |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| \pm |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \otimes |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\right\}$$

Om uit de toestand van het gehele systeem 1-deeltjestoestanden te halen is (volgens Dieks in [1]) het beste wat we kunnen doen de partiële sporen te nemen, naar de twee 1-deeltjeshilbertruimten. De partiële sporen zijn

$$W_I = W_{II} = \frac{1}{2}\{ |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \}$$

We zien dat de partiële sporen gelijk zijn. We kunnen hieruit nu opmaken dat beide deeltjes zich in dezelfde toestand bevinden.

In een gesymmetriseerde toestand (waarmee een toestand bedoeld wordt die symmetrisch of anti-symmetrisch is) zijn altijd alle partiële sporen gelijk. Dat is direkt in te zien omdat het symmetriseren nu juist maakt dat alle 1-deeltjeshilbertruimten gelijkwaardig worden.

De deeltjes, die toch al identiek waren, zitten nu ook nog in precies dezelfde toestand. Er is niets meer wat het ene deeltje van het andere deeltje kan onderscheiden. Dit wordt het individualisatie-probleem genoemd.

2 bespreking van de problemen rond de term deeltje

2.1 inleiding

In het vorige hoofdstuk zijn de problemen rond de term deeltje in quantummechanische systemen met meer deeltjes van een soort besproken zoals ze in de literatuur worden geformuleerd. We kunnen daarover opmerken dat er termen gebruikt worden die niet altijd goed en eenduidig gedefiniëerd zijn.

In het bijzonder wordt met de term deeltje niet altijd hetzelfde bedoeld. Bij de bespreking van het correlatieprobleem is van een heel andere deeltjesindicestoekenning uitgegaan dan bij de bespreking van het individualisatieprobleem. Dit wordt besproken in 2.3. Ook blijkt er in de literatuur niet altijd gelijk gedacht te worden over de individualiseerbaarheid van bijvoorbeeld gedetecteerde deeltjes. Dit heeft te maken met de formulering van het symmetriseringsvoorschrift en wordt uitgebreid besproken in 2.4.

Allereerst zal ik in 2.2 enige definities of omschrijvingen geven van een aantal termen die tot nu toe nog niet goed gedefiniëerd waren en die in het vervolg veel gebruikt zullen worden.

2.2 enige definities en een opmerking

2.2.1 identieke deeltjes of deeltjes van dezelfde soort

Met **deeltjes van dezelfde soort** worden deeltjes bedoeld met dezelfde waarde voor hun massa, lading, spin, eventuele afmetingen en alle overige grootheden, die als parameterwaarden in een Hamiltoniaan van een willekeurig syteem kunnen voorkomen en betrekking hebben op de betreffende deeltjes. Deeltjes van dezelfde soort zal ik in het vervolg aanduiden met de term **identieke deeltjes.** Twee protonen zijn bijvoorbeeld identieke deeltjes net zo als twee elektronen, twee neutonen en twee fotonen.

2.2.2 individualiseerbaar deeltje en ononderscheidbaar deeltje

Met een **individualiseerbaar deeltje** wordt een deeltje bedoeld dat door een specifiek kenmerk aangeduid kan worden, waardoor het zich onderscheidt van alle andere deeltjes. Zodra ik spreek over 'het gedetecteerde deeltje' heb ik al verondersteld dat het deeltje individualiseerbaar is. Het heeft een kenmerk dat alle andere deeltjes niet hebben. Een individualiseerbaar deeltje is een 'ander' deeltje dan de overige deeltjes.

Ik kan ook spreken over **een groep deeltjes die als geheel individualiseerbaar zijn** ten opzichte van een andere groep deeltjes. De deeltjes binnen de groep hoeven dan niet onderling individualiseerbaar te zijn. De groep heeft als geheel een specifiek kenmerk waardoor het zich onderscheidt van andere (groepen) deeltjes.

Met de term **ononderscheidbaar deeltje** wordt in de literatuur meestal een deeltje bedoeld dat deel uitmaakt van een systeem waarvan de toestand gesymmetriseerd is. Daarnaast kan met de term 'ononderscheidbaar' ook bedoeld worden: 'niet individualiseerbaar'.

Als met 'ononderscheidbaar' zowel bedoeld wordt 'niet individualiseerbaar' als dat de bijbehorende toestand symmetrisch is, dan volgt hieruit dat er aangenomen is dat alle deeltjes die deel uitmaken van een gesymmetriseerde toestand niet individualiseerbaar zijn. Het is echter juist het hoofddoel van deze scriptie om argumenten aan te dragen tegen deze stellingname. Ik hoop in het volgende aannemelijk te maken dat uit het feit dat een toestand symmetrisch is niet volgt dat de bijbehorende deeltjes niet individualiseerbaar zijn.

In deze scriptie zal ik de term 'ononderscheidbaarheid' dan ook verder niet gebruiken. Mijns inziens is zij hoe dan ook overbodig naast de termen 'identiek' en 'individualiseerbaar'.

2.2.3 De toestand van een deelsysteem

We zullen in deze scriptie herhaaldelijk een systeem S beschouwen dat uit N identieke deeltjes bestaat in de toestand $|\psi\rangle$, die is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\phi_1\rangle$ ..$|\phi_N\rangle$. S bestaat uit de twee deelsystemen S' en S''. S' bestaat uit M deeltjes en is in de zuivere toestand $|\psi'\rangle$, die is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\phi_1\rangle$ ..$|\phi_M\rangle$. S'' bestaat uit N-M deeltjes en is in de zuivere toestand $|\psi''\rangle$, die is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\phi_{M+1}\rangle$ ..$|\phi_N\rangle$.

In hoofdstuk 6 zal deze manier van opsplitsen van een systeem in deelsystemen en de stelling dat in het algemeen systemen in een zuivere toestand zijn, als er gewerkt wordt in de niet-statistische quantummechanica, worden gerechtvaardigd. We kunnen er alvast over opmerken dat hieruit blijkt dat in deze scriptie de toestand van een deelsysteem niet gedefiniëerd is door het partiële spoor naar een subhilbertruimte van het systeem, als het systeem identieke deeltjes bevat. Dan zou de toestand van het deelsysteem in het algemeen namelijk een gemengde toestand zijn.

De toestand van een deelsysteem is in deze scriptie gedefiniëerd als een zuivere toestand die is opgebouwd uit een deelverzameling van de verzameling van 1-deeltjestoestanden waaruit de toestand van het systeem is opgebouwd. De toestand van een deelsysteem moet natuurlijk wel gesymmetriseerd zijn volgens het symmetriseringsvoorschrift.

2.2.4 overlap

Beschouw een systeem, S, dat uit N identieke deeltjes bestaat, in de toestand $|\psi\rangle$ die is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\phi_1\rangle \,..\, |\phi_N\rangle$. S bestaat uit de twee deelsystemen S′ en S″. S′ bestaat uit M deeltjes en is in de toestand $|\psi'\rangle$ en S″ bestaat uit N-M deeltjes en is in de toestand $|\psi''\rangle$. De toestand $|\psi'\rangle$ is opgebouwd uit de 1-deeltjes-toestanden $|\phi_1\rangle \,..\, |\phi_M\rangle$ en de toestand $|\psi''\rangle$ is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\phi_{M+1}\rangle \,..\, |\phi_N\rangle$.

We zeggen nu dat S′ en S″ **geen overlap** hebben als voldaan is aan de voorwaarde:

$$\langle\phi_i|x^N|\phi_j\rangle = 0 \qquad \text{voor alle } i = 1..M \text{ en } j = M+1..N \text{ en alle } N \tag{2.1}$$

waarbij x de plaatscoördinaat voorstelt.
Hieruit is te zien dat niet overlappende toestanden altijd orthogonaal zijn (N=0) en dat het niet overlappen van golffuncties feitelijk betekent dat de golffuncties elkaar ruimtelijk niet overlappen.

Als aan de voorwaarde voor 'geen overlap' is voldaan, dan kunnen we zeggen dat S is opgebouwd uit twee deelsystemen die elkaar niet overlappen. We kunnen ook zeggen dat de deeltjes uit S′ niet overlappen met de deeltjes uit S″ of dat de 1-deeltjestoestanden uit S′ niet overlappen met de 1-deeltjestoestanden uit S″. In het bijzonder, als S′ een 1-deeltjessysteem is, kunnen we spreken van het deeltje dat niet met de overige deeltjes uit S overlapt.

Als niet aan de voorwaarde voor 'geen overlap' is voldaan dan overlappen S′ en S″. Als er niet twee deelsystemen van S te vinden zijn, die elkaar niet overlappen, dan spreken we van **gehele overlap tussen de N 1-deeltjestoestanden** van $|\psi\rangle$.

We kunnen dus spreken over systemen, deeltjes, of 1-deeltjestoestanden, die elkaar wel of niet overlappen.

We moeten opmerken dat niet overlappende deelsystemen in feite niet bestaan. Iedere quantummechanische golffunctie ontwikkelt zich in zijn evolutie onmiddellijk naar een golffunctie met een oneindige uitgebreidheid in plaats, als hij dat niet al was. Er bestaan dus in feite geen golffuncties die gedurende enige tijd voldoen aan (2.1).
Het is echter zeer goed mogelijk te werken met golffuncties die in benadering wel aan (2.1) voldoen. Dit is bijvoorbeeld het geval als de twee golffuncties ruimtelijk slechts zeer weinig overlappen. Twee deelsystemen die bijvoorbeeld in zeer goede benadering niet overlappen zijn een proton op de maan en een proton op aarde.

2.2.5 systeem, deelsysteem, veeldeeltjessysteem en meerdeeltjessysteem

Een quantummechanisch **systeem** definiëer ik zodanig dat deeltjes van een systeem geen overlap en geen interactie hebben met alle overige deeltjes. Een systeem is geïsoleerd. Dit betekent dat als er een systeem in beschouwing wordt genomen er ook alleen observabelen worden beschouwd die alleen op het systeem werken. Omdat systemen geen interactie hebben met hun omgeving zal de toestand van een systeem geurende zijn evolutie, de eigenschap van geen overlap met zijn omgeving behouden.

In werkelijkheid komen dergelijke systemen in de natuur niet voor en kunnen ook niet kunstmatig geprepareerd worden. Er zijn altijd op zijn minst fotonen of molekulen aan de rand, die niet tot het systeem horen en wel een interactie hebben met de deeltjes binnen het systeem. Voor de uitkomsten van experimenten is dit meestal verwaarloosbaar.

Het theoretisch begrip systeem, wat hier gedefiniëerd wordt, is dus eigenlijk een idealisering van de 'systemen die in de natuur voorkomen of geprepareerd worden'. Deze laatsten zullen we **'werkelijke systemen'** noemen. Deze voldoen dus niet aan de eis dat ze geen enkele interactie hebben met hun omgeving. Ze voldoen slechts bij benadering aan deze eis en dat geldt dan ook maar voor een beperkte tijdsduur. Er is één uitzondering. Het enige werkelijke systeem dat wel voldoet aan de eis dat het geen enkele interactie heeft met zijn omgeving is het universum.

De toestand van een **deelsysteem** wordt beschreven in een subhilbertruimte van een systeem. Er zijn verder geen restricties aan een 'deelsysteem'. Twee deelsystemen kunnen dus wel overlappen.

Een **veeldeeltjessysteem** is een quantummechanisch systeem dat bestaat uit identieke deeltjes die geheel overlappen.

Een **meerdeeltjessysteem** is een quantummechanisch systeem dat bestaat uit identieke deeltjes.

Een **N-deeltjessysteem** is en meerdeeltjessysteem dat bestaat uit N deeltjes.

2.2.6 opmerking over systemen met deeltjes van verschillende soort

In het vervolg zullen vaak veeldeeltjessystemen en meerdeeltjessytemen aan de orde komen. De beweringen over deze systemen gelden ook voor uitgebreidere systemen, waarvan het veel- of meerdeeltjessysteem een onderdeel vormt, bijvoorbeeld een systeem dat bestaat uit N protonen en M elektronen. Ik zal deze logische uitbreiding niet altijd noemen maar veronderstellen dat het duidelijk is dat het gestelde ook geldt voor systemen die uitgebreid zijn met deeltjes van een andere soort.

2.3 deeltjesindicestoekenning

2.3.1 inleiding

In de notatie van bijvoorbeeld de toestand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle^{(1)}|\varphi_2\rangle^{(2)} - |\varphi_2\rangle^{(1)}|\varphi_1\rangle^{(2)}\right) \tag{2.2}$$

komen twee soorten indices voor, de onder-indices die de verschillende toestanden aanduiden en de 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Deze laatste zijn de bovenindices tussen haakjes. Ze worden meestal weggelaten, omdat ze al in de volgorde van de notatie tot uitdrukking komen.

In de literatuur is de term deeltje niet eenduidig gedefiniëerd. Soms worden 1-deeltjeshilbertruimte-indices als deeltjes-indices genomen en soms worden aan verschillende toestanden verschillende deeltjes toegekend. De twee deeltjesindicestoekenningen die daarmee gedefiniëerd zijn, zijn we allebei in het vorige hoofdstuk al tegengekomen. Ze zullen in deze paragraaf kort besproken worden. in hoofdstuk 5 gaan we op dit onderwerp dieper in.

2.3.2 toestand-indices als deeltjesindices

De deeltjesindicestoekenning, die in 1.2 bij de beschrijving van het correlatieprobleem gebruikt is, stelt dat elke 1-deeltjestoestand hoort bij een apart deeltje. Zo hoorde in het eerste voorbeeld, van correlatie *binnen* een toestand, de toestand $|a\rangle$ bij het ene en $|b\rangle$ bij het andere deeltje. Bij het voorbeeld van correlatie *tussen* toestanden was het ene deeltje in toestand $|a\rangle$ of $|b\rangle$ en het andere deeltje ook. Met deze deeltjesindicestoekenning is er alleen een individualisatie-probleem als beide deeltjes in dezelfde toestand zitten, dus als de toestand van het hele syteem bijvoorbeeld $|a\rangle|a\rangle$ is. Met deze deeltjesindicestoekenning is het individualisatie-probleem dus zeer vereenvoudigd.
Aan de andere kant kleven er wel grote problemen aan de eenduidigheid van deze deeltjesindicestoekenning.
Voor fermionen geldt bijvoorbeeld dat

$$|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle = |\varphi_1\rangle|\varphi_1+\varphi_2\rangle - |\varphi_1+\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle \tag{2.3}$$

Het is dus niet duidelijk of nu het ene deeltje in toestand $|\varphi_1\rangle$ zit en het andere in toestand $|\varphi_2\rangle$ of dat het ene deeltje in toestand $|\varphi_1\rangle$ zit en het andere in toestand $|\varphi_1+\varphi_2\rangle$.

Bijvoorbeeld ook wordt altijd gesteld dat binnen een Fermibol van een N-deeltjessysteem de 1-deeltjestoestanden $|k_1\rangle$, $|k_2\rangle, \ldots\ldots, |k_N\rangle$ voorkomen. Voor een systeem in de grondtoestand (dat is de toestand waarin alle 1-deeltjesgolffuncties binnen de fermibol liggen) betekent dat met deze deeltjesindicestoekenning dat elk deeltje in een eigentoestand van k zit. Dezelfde grondtoestand kan echter ook geschreven worden als een toestand die als 1-deeltjestoestanden allemaal superposities van de k-eigenvectoren bevat. Daarbij zouden de deeltjes dan in een heel andere toestand zitten.

Er is ook een probleem met deze deeltjesindicestoekenning voor toestanden die niet als een symmetrisering van een produkt van 1-deeltjestoestanden te schrijven zijn, zoals:

$$|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle + |\varphi_3\rangle|\varphi_4\rangle \pm |\varphi_4\rangle|\varphi_3\rangle$$

Het is dan niet duidelijk welke toestand aan de individuele deeltjes toegekend moet worden. Je zou kunnen zeggen dat de toestand een superpositie is van de toestand waarin deeltje 1 in $|\varphi_1\rangle$ zit en deeltje 2 in $|\varphi_2\rangle$ en de toestand waarin deeltje 1 in $|\varphi_3\rangle$ zit en deeltje 2 in $|\varphi_4\rangle$, maar je zou evengoed kunnen zeggen dat de toestand een superpositie is van de toestand waarin deeltje 1 in $|\varphi_1\rangle$ zit en deeltje 2 in $|\varphi_2\rangle$ en de toestand waarin deeltje 1 in $|\varphi_4\rangle$ zit en deeltje 2 in $|\varphi_3\rangle$.

We kunnen concluderen dat deze deeltjesindicestoekenning niet eenduidig is. Overigens krijgt men met deze deeltjesindicestoekenning te maken met correlatieproblemen, die beschreven zijn in 1.2. De deeltjes, die met deze deeltjesindicestoekenning verkregen worden, zal ik q-deeltjes noemen.

2.3.3 1-deeltjeshilbertruimte-indices als deeltjesindices

De deeltjesindicestoekenning die gebruikt is in 1.3, bij de beschrijving van het individualisatieprobleem, is zodanig dat in elke 1-deeltjeshilbertruimte, die een subhilbertruimte is van de totale hilbertruimte van het systeem, de toestand van een deeltje wordt beschreven. Dit komt overeen met het toekennen van een deeltjesindex aan elke 1-deeltjeshilbertruimte. Deze deeltjesindicestoekenning wordt algemeen toegepast in de literatuur als het gaat over het individualisatieprobleem en bijvoorbeeld ook bij de bespreking van het symmetriseringsvoorschrift. Het sluit aan bij het feit dat niet identieke deeltjes ieder in een eigen 1-deeltjeshilbertruimte beschreven worden. De deeltjes die met deze deeltjesindices-toekenning verkregen worden zal ik h-deeltjes noemen.

Het probleem met het gebruik van h-deeljes is het individualisatieprobleem, dat in 1.3 is uitgelegd en in 2.4 uitgebreid besproken zal worden.

2.4 bespreking van het individualisatieprobleem en de formulering van drie verschillende deeltjesconcepten

Deeltjes die door niets van elkaar onderscheiden kunnen worden, omdat ze identiek zijn en ook allemaal in dezelfde toestand zitten, zijn niet-individualiseerbare deeltjes. Een niet-individualiseerbaar deeltje kan geen enkel specifiek kenmerk hebben, zoals dat het gedetecteerd is of zojuist een deeltjesversneller verlaten heeft, waarmee het onderscheiden zou kunnen worden van de overige deeltjes. Men kan in feite niet eens verwijzen naar 'dat deeltje' als het een niet-individualiseerbaar deeltje betreft, omdat de verwijzing het deeltje al onderscheidt van de andere deeltjes.

Het individualisatieprobleem, dat besproken is in 1.3 kan nu de volgende drie vragen oproepen.

- Kan men spreken over 'het gedetecteerde deeltje' alsof het een ander deeltje is dan alle overige deeltjes?

- Beschouw een systeem S dat is opgebouwd uit twee deelsystemen S' en S", waarbij S' een veeldeeltjessysteem in Utrecht en S" een veeldeeltjessysteem van dezelfde deeltjessoort in New York is. Kan men nu spreken van de deeltjes uit S' als andere deeljes dan de deeltjes uit S"?

- Zijn alle protonen in het gehele universum feitelijk niet individualiseerbaar?

Er zijn op elk van deze vragen twee antwoorden mogelijk, ja en nee, die leiden tot verschillende standpunten wat betreft de individualiseerbaarheid van deeltjes. In feite hoort bij elk verschillend standpunt een ander deeltjesconcept.

Het deeltjesconcept, waarin alleen de laatste vraag met nee beantwoord wordt, zal ik deeltjesconcept A noemen. Het stelt dat alleen deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem niet individualiseerbaar zijn. Dit deeltjesconcept wordt meestal zonder dat het is uitgesproken of gedefiniëerd door de meeste beoefenaars van de quantummechanica gehanteerd. Men spreekt over deeltjes die niet tot een veeldeeltjessysteem behoren als 'individualiseerbare deeltjes' of 'onderscheidbare deeltjes'. Uitspraken als: 'het gedetecteerde proton is even later weer gedetecteerd' en 'de protonen in de deeltjesversneller krijgen een hoge snelheid' zijn dus niet problematisch in dit deeltjesconcept.

Er is alleen een individualisatieprobleem voor deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem. Dit kan worden geaccepteerd als (weer) een quantummechanische rariteit. De deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem vertonen toch ook al correlaties die niet passen in ons intuïtieve deeltjesidee, waarin deeltjes onafhankelijk van elkaar bewegen of onder invloed van bekende krachten. Het individualisatieprobleem kan daar dan ook nog wel bij. De deeltjes die deel uitmaken van een veeldeeltjessysteem zijn hiermee niet visualiseerbaar en hebben door het individualisatie- en correlatieprobleem geen enkele relatie met ons intuïtieve deeltjesidee.

De aanhangers van dit deeltjesconcept maken, voor de rechtvaardiging van hun stelling dat deeltjes buiten een veeldeeltjessysteem wel individualiseerbaar zijn, gebruik van het feit dat voor deze deeltjes de golffunctie niet gesymmetriseerd hoeft te worden. Daardoor zijn de partiële sporen naar de 1-deeltjeshilbertruimten, die de toestand van de deeltjes weergeven, verschillend en zijn de deeltjes dus individualiseerbaar.

Dit deeltjesconcept lijkt misschien heel acceptabel, maar de juistheid van de beredenering waarom deeltjes buiten een veeldeeltjessysteem wel individualiseerbaar zouden zijn hangt af van de formulering van het symmetriseringsvoorschrift. In deze beredenering wordt niet alleen aangenomen dat de toestand van de deeltjes buiten een veeldeeltjessysteem niet gesymmetriseerd hoeft te zijn, het is ook noodzakelijk dat de toestand niet gesymmetriseerd is. In een gesymmetriseerde toestand zijn de deeltjes immers niet individualiseerbaar.

Er zullen in hoofdtuk 3 drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift besproken worden. Bovenstaande beredenering is alleen correct als voor het symmetriseringsvoorschrift een bepaalde formulering gekozen wordt, die we in hoofdstuk 3 symmetriseringsvoorschrift A zullen noemen. Deze stelt dat de toestand van identieke deeltjes alleen binnen een veeldeeltjessysteem gesymmetriseerd is.

Het deeltjesconcept, waarin alleen de eerste vraag met ja beantwoord wordt, zal ik deeltjesconcept B noemen. Het stelt dat alle identieke deeltjes binnen een meerdeeltjes-systeem niet individualiseerbaar zijn. Wat hierboven geschreven is voor deeltjesconcept A geldt ook voor deeltjesconcept B, waarbij 'veeldeeltjessysteem' vervangen is door 'systeem'. Er hoort een andere formulering van het symmetriseringsvoorschrift bij dit deeltjesconcept. Deze wordt in hoofdstuk 3 symmetriseringsvoorschrift B genoemd en stelt dat de toestand van identieke deeltjes alleen binnen een meerdeeltjes-systeem gesymmetriseerd is.

De aanhangers van de stelling dat alle identieke deeltjes in het universum niet individualiseerbaar zijn en die dus alleen de derde vraag met ja zullen beantwoorden zal ik relateren aan deeltjesconcept C. Daarin is het feitelijk al onjuist te spreken over 'het gedetecteerde deeltje', omdat hiermee immers al verondersteld wordt dat dit deeltje individualiseerbaar is.

Dit deeltjesconcept komt wel voor in de literatuur. Het wordt bijvoorbeeld aangehangen door Penrose in [5]. Het feit dat er in de praktijk toch over identieke deeltjes gesproken wordt alsof ze wel individualiseerbaar zijn, wordt door Penrose min of meer gerechtvaardigd door te stellen dat in feite de deeltjes niet individualiseerbaar zijn, maar dat men in benadering in bepaalde gevallen wel over deeltjes kan spreken alsof ze individualiseerbaar zijn. Dit wordt besproken en bekritiseerd in hoofdstuk 7.

De formulering van het symmetriseringsvoorschrift, die hoort bij dit deeltjesconcept, heb ik in hoofdstuk 3 symmetriseringsvoorschrift C genoemd. Deze stelt dat de toestand van alle identieke deeltjes in het universum gesymmetriseerd is.

In hoofdstuk 3 worden de drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift nog eens gegeven en wordt bewezen dat ze alle drie empirisch equivalent zijn. Toch wordt ook aangetoond dat symmetriseringsvoorschrift C, de meest universele, de enige juiste is. Daardoor kunnen deeltjesconcept A en B niet meer als consistent deeltjesconcept in aanmerking komen. In hoofdstuk 5 zullen we om verschillende andere redenen, waaronder natuurlijk de ongewenstheid van een deeltjesconcept dat niet aansluit bij ons intuïtieve deeltjesidee en het algemene gebruik van de term deeltje, ook deeltjesconcept C verwerpen.

3 het symmetriseringsvoorschrift

3.1 drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift

In de quantummechanica moet de toestand van een veeldeeltjessysteem symmetrisch of anti-symmetrisch zijn in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices, opdat berekende verwachtingswaarden overeenkomen met de waarnemingen. Daarom geldt het symmetriseringsvoorschrift.

Ik zal drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift onderscheiden, die ik symmetriseringsvoorschrift A, symmetriseringsvoorschrift B en symmetriseringsvoorschrift C zal noemen.

symmetriseringsvoorschrift A:

> De golffunctie van een *veeldeeltjessysteem* moet symmetrisch of anti-symmetrisch zijn onder verwisseling van de 1-deeltjeshilbertruimte-indices.

symmetriseringsvoorschrift B:

> De golffunctie van een *meerdeeltjessysteem* moet symmetrisch of anti-symmetrisch zijn onder verwisseling van de 1-deeltjeshilbertruimte-indices.

symmetriseringsvoorschrift C:

> De golffunctie van het systeem dat alle deeltjes van een soort in het *gehele universum* bevat is symmetrisch of anti-symmetrisch onder verwisseling van de 1-deeltjeshilbertruimte-indices.

In de praktijk wordt altijd gewerkt met symmetriseringsvoorschrift A, omdat deze de bewerkelijkheid van symmetriseringsvoorschrift B en C zeer vereenvoudigt. Aan de andere kant is symmetriseringsvoorschrift A echter de minst universele.

In de volgende paragraaf zal worden aangetoond, wat we intuïtief al kunnen verwachten, dat het voor alle toepassingen van de quantummechanica geen verschil maakt welke formulering van het symmetriseringsvoorschrift als uitgangspunt wordt genomen. In 3.3 zal de status van het symmetriseringsvoorschrift worden besproken waarna we in 3.4 een voorkeur zullen uitspreken voor symmetriseringsvoorschrift C.

3.2 De empirische equivalentie tussen de drie symmetriseringsvoorschriften.

Beschouw een systeem S dat bestaat uit twee deelsystemen, S′ en S″, die elkaar niet overlappen.

We noteren de toestand van S′, die gesymmetriseerd is, als $|\chi_u\rangle$ en de gesymmetriseerde toestand van S" als $|\chi_v\rangle$. Met symmetriseringsvoorschrift A wordt de toestand van S dan :

$$|\psi_{NS}\rangle = |\chi_u\rangle\ |\chi_v\rangle$$

Deze toestand is niet geheel symmetrisch.

Als we uitgaan van symmetriseringsvoorschrift B dan moet de hele toestand symmetrisch zijn. We noteren deze toestand als $|\psi_S\rangle$.

We beschouwen nu een willekeurige operator, A, die diagonaal is in plaats en die gedefiniëerd is binnen S en die symmetrisch is in alle 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Nu geldt voor iedere A:

$$\langle\psi_{NS}\,|\,A\,|\,\psi_{NS}\rangle = \langle\psi_S\,|\,A\,|\,\psi_S\rangle \qquad (3.1)$$

Dit wordt bewezen in Appendix A.

De eis dat operator A symmetrisch moet zijn vormt geen beperking voor het aantal observabelen dat in de beschouwing meegenomen kan worden. Elke operator kan zonder empirische gevolgen gesymmetriseerd worden. Dit wordt toegelicht in Appendix A en zal ook aan de orde komen in Appendix B, die aansluit bij 3.3.

De eis dat de operator A diagonaal moet zijn in plaats is wel een restrictie op de totale klasse van operatoren. We kunnen echter opmerken dat elke operator die correspondeert met een werkelijk uitvoerbare meting hieraan voldoet. Elke meting immers, ook een meting van een spin, gaat feitelijk, direkt of indirekt, gepaard met een plaatsmeting.

We zien uit (3.1) en het bovenstaande dat het voor de toepassingen van de quantummechanica niet *noodzakelijk* is de gehele toestand te symmetriseren. Alleen de toestanden die overlappen, zoals binnen en veeldeeltjessysteem, moeten symmetrisch of anti-symmetrisch zijn. Aan de andere kant *mag* de gehele toestand wel symmetrisch of anti-symmetrisch zijn. Uit (3.1) volgt dat symmetriserings-voorschrift A en symmetriseringsvoorschrift B empirisch equivalent zijn.

Als we met symmetriseringsvoorschrift C willen werken dan moet altijd het gehele universum in de beschrijving van een toestand worden meegenomen. De toestand moet immers symmetrisch of anti-symmetrisch zijn in alle 1-deeltjeshilbertruimten die bij alle identieke deeltjes in het hele universum horen.

Als we nu binnen het universum een systeem beschouwen, dan willen we alleen observabelen beschouwen die binnen het systeem gedefinëerd zijn en niet binnen het gehele universum. Ook willen we bij de beschrijving van de toestand niet het hele universum mee hoeven te nemen. Het is intuïtief direkt duidelijk dat dit mag, ook als we stellen dat symmetriseringsvoorschrift C geldt. Hieronder zullen we dit aantonen.

Beschouw het gehele universum als systeem S en twee deelsystemen, S′ en S″, waarbij S′ een M-deeltjessysteem is in de gesymmetriseerde toestand $|\chi_u\rangle$ en S″ het systeem van alle overige deeltjes in het universum. Beschouw een operator, $B_{S'}$, die diagonaal is in plaats en die uitsluitend werkt op S′ en gedefiniëerd is in S′ en een operator, B_S, die diagonaal is in plaats en die uitsluitend werkt op S′, maar gedefiniëerd is in S. In Appendix A wordt bewezen dat geldt:

$$\langle \psi_{NS} \mid B_S \mid \psi_{NS} \rangle = \langle \chi_u \mid B_{S'} \mid \chi_u \rangle \tag{3.2}$$

waarbij

$$B_S = \frac{1}{N-M} \left(B_{S'} \otimes \mathbb{1} \right)$$

en $|\psi_{NS}\rangle$ is de niet geheel gesymmetriseerde toestand van S die wel gesymmetriseerd is in S′ en S″.

Uit (3.2) zien we dat bij elke operator, die in het gehele universum is gedefiniëerd en alleen op een bepaald systeem, S′, werkt, een operator gevonden kan worden die dezelfde verwachtingswaarden genereert en alleen in S′ is gedefiniëerd.

Merk op dat B_S een niet-symmetrische operator is in S. Er geldt dus niet dat de verwachtingswaarde van B_S in toestand $|\psi_{NS}\rangle$ gelijk is aan de verwachtingswaarde van B_S in de gesymmetriseerde toestand $|\psi_S\rangle$.

Het is natuurlijk ook mogelijk een relatie zoals (3.2) op te stellen, waarbij wel van de symmetrische toestand van S wordt uitgegaan. In Appendix A is dit gedaan.

We kunnen nu het volgende concluderen. Door uit te gaan van symmetriseringsvoorschrift C moet het hele universum als systeem genomen worden voor de bepaling van alle verwachtingswaarden van operatoren die alleen op een bepaald deelsysteem werken. Maar uit (3.2) volgt nu dat evengoed het deelsysteem, als dit een systeem is, als systeem genomen kan worden. Dit betekent dat men evengoed uit kan gaan van symmetriseringsvoorschrift B. Hieruit volgt nu, samen met het feit dat symmetriseringsvoorschrift B empirisch equivalent is met symmetriseringsvoorschrift A, dat alle drie de formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift empirisch equivalent zijn.

3.3 de status van het symmetriseringsvoorschrift

In de literatuur komt men nog vaak de volgende stelling tegen:

het symmetriseringsvoorschrift is een rechtstreeks gevolg van de ononderscheidbaarheid van deeltjes (3.3)

Met de term ononderscheidbaar wordt in dit geval identiek bedoeld. Er zijn in de literatuur vele bewijzen gegeven voor deze stelling, bijvoorbeeld door Kaplan in [6] en Sarry in [7]. Men toont dan aan dat de verwachtingswaarde van alle observabelen alleen dan onafhankelijk van de keuze van de deeltjesindices is als de golffunctie symmetrisch of antisymmetrisch is. Met andere woorden, het verwisselen van twee willekeurige deeltjesindices heeft dan en slechts dan geen empirische gevolgen als de golffunctie symmetrisch of antisymmetrisch is.

We kunnen direkt inzien dat elk bewijs van deze stelling niet juist kan zijn. Voor klassieke identieke deeltjes immers geldt ook dat het verwisselen van twee deeltjesindices geen empirische consequenties heeft. De aanname dat dit ook in de quantummechanica moet gelden kan dus nooit tot het symmetriseringsvoorschrift leiden, dat duidelijk niet-klassieke implicaties heeft.

We kunnen ook opmerken dat, als het feit dat de deeltjes identiek zijn, de enige reden zou zijn voor het gelden van het symmetriseringsvoorschrift, het dan zo zou moeten zijn dat het symmetriseringsvoorschrift ook *noodzakelijk* voor alle identieke deeltjes moet gelden. Dus alle identieke deeltjes van het gehele universum *moeten* gezamelijk in een gesymmetriseerde toestand zitten. Nu hebben we in de vorige paragraaf gezien dat het alleen noodzakelijk is deeltjestoestanden in een symmetrisering mee te nemen die overlappen. Ook om deze reden kan de stelling nooit juist zijn.

De pogingen om (3.3) te bewijzen zijn in [6] en [7] gebaseerd op de aanname dat er voldoende veel niet-symmetrische operatoren observabelen zijn. Er is in de literatuur echter een discussie of operatoren van een veeldeeltjessyteem, die observabelen zijn, wel of niet symmetrisch moeten zijn. In [1] en [4] wordt bijvoorbeeld gesteld dat ze wel symmetrisch moeten zijn. Dieks merkt op basis daarvan in [1] op dat daarom de bewijzen van Kaplan en Sarry onjuist zijn.

Mijns inziens hangt het af van de gebruikte deeltjesindicestoekenning of alle observabelen in een meerdeeltjessyteem symmetrisch moeten zijn. In elk geval is het zo dat het voldoende is aan te nemen dat alle observabelen symmetrisch zijn. Alle eventueel niet-symmetrische observabelen kunnen namelijk zonder verlies aan inhoud, gesymmetriseerd worden. Deze laatste drie uitspraken worden uitgebreid toegelicht in Appendix B, waarin precies de relatie aangegeven wordt tussen het symmetriseringsvoorschrift en een symmetrie in de hamiltoniaan van het systeem en in de overige operatoren, die observabelen zijn.

Resumerend kunnen we stellen dat het symmetriseringsvoorschrift niet afleidbaar is uit het feit dat de deeltjes identiek zijn, maar gezien moet worden als een onafhankelijk postulaat. Dit wordt ook gesteld in [1], [3] en [4].

3.4 het verwerpen van symmetriseringsvoorschrift A en symmetriseringsvoorschrift B

We hebben in 3.2 gezien dat de drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift empirisch equivalent zijn. In 3.3 hebben we gezien dat het symmetriseringsvoorschrift een onafhankelijk postulaat is en dus nergens uit afleidbaar is, hoewel er wel een verband is met de symmetrie in de hamiltoniaan, zoals in Appendix B is besproken.

We kunnen ons nu afvragen welke van de drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift waar is. Met deze vraag begeven we ons op glad ijs. Er bestaan verschillende definities van waarheid en verschillende opvattingen over de vraag of we wel over de waarheid van een fysische theorie mogen of kunnen spreken.

Alleen een 'realist' zal vinden dat slechts één formulering van het symmetriseringsvoorschrift het juiste is. De realisten kunnen dan nog onderverdeeld worden in 'conventionalisten', 'skeptici' en 'a-prioristen', die allemaal weer een verschillende opvatting hebben over de manier waarop de keuze gemaakt moet worden.

Er is echter iets heel anders aan de hand. In de afleiding van (2.3) en (2.4) is gebruik gemaakt van het feit dat bij de definitie van een systeem hoort dat het volledig geïsoleerd is van zijn omgeving. Er is dus steeds uitgegaan van ideale systemen. Deze hadden we S, S' en S" genoemd. Voor die ideale systemen zijn de drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift weliswaar empirisch equivalent, maar in de empirie kunnen dergelijke systemen, behalve dan het universum, helemaal niet gevonden worden. We kunnen dus stellen dat de drie formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift in werkelijkheid niet empirisch equivalent zijn. Dit is voor de toepassingen weliswaar niet van belang maar we kunnen nu wel stellen dat slechts één formulering de juiste of in ieder geval de beste is.

Symmetriseringsvoorschrift A en symmetriseringsvoorschrift B zijn geformuleerd binnen een, door de beoefenaar van de quantummechanica in gedachten opgesteld systeem, dat eventueel een relatie heeft met een werkelijk systeem dat niet ideaal is. Symmetriseringsvoorschrift C daarentegen is universeel, niet afhankelijk van een bepaald afgebakend systeem. Symmetriseringsvoorschrift A en symmetriseringsvoorschrift B maken een onnatuurlijk onderscheid tussen deeltjes met en deeltjes zonder overlap, terwijl deeltjes zonder enige overlap in de natuur helemaal niet voorkomen.

Het mag duidelijk zijn dat we van een postulaat in de quantummechanica eisen dat het een universeel karakter heeft. Hiermee verwerpen we de formuleringen A en B van het symmetriseringsvoorschrift en stellen we dat het symmetriseringspostulaat luidt als geformuleerd door symmetriseringvoorschrift C.

3.5 gevolgen voor het deeltjesconcept

Met het verwerpen van de formuleringen A en B van het symmetriseringsvoorschrift moeten automatisch ook de deeltjesconcepten A en B die in 2.4 zijn geformuleerd verworpen worden. Het enige tot nu toe geformuleerde deeltjesconcept dat overblijft, is deeltjesconcept C, waarin gesteld wordt dat alle identieke deeltjes in het gehele universum niet individualiseerbaar zijn.

Dit deeltjesconcept past echter niet bij ons intuïtieve deeltjesidee en dus de manier waarop er over deeltjes geschreven en gesproken wordt in de quantummechanica. Om deze reden willen we graag deeltjesconcept C verwerpen.

Tot nu toe is ons intuïtieve deeltjesidee niet nader omschreven. In het volgende hoofdstuk zal de oorsprong van deze intuïtie, de klassieke mechanica, uitgebreid besproken worden. In hoofdstuk 4 zullen we de klassieke mechanica modificeren zodanig dat er een analogie zichtbaar wordt wat betreft de individualiseerbaarheid van klassieke en quantummechanische deeltjes. Deze analogie zal aantonen dat de deeltjesindices-toekenning, die deeltjesindices gelijk stelt aan 1-deeltjeshilbertruimte-indices, verworpen moet worden. Dit ondersteunt ook het verwerpen van de deeltjesconcepten A,B en C, die van deze deeltjesindicestoekenning gebruik maken.

De analogie zal ook laten zien dat de deeltjesindices-toekenning die toestand-indices gelijk stelt aan deeltjesindices een deeltjesconcept geeft dat aansluit bij het klassieke deeltjesconcept.

4 het klassieke deeltje

4.1 het begrip deeltje in de klassieke mechanica

Het begrip deeltje is één van de meest fundamentele begrippen in de klassieke mechanica. Macroscopische objecten kunnen in bepaalde omstandigheden beschreven worden door een deeltje in de theorie.

Beschouw bijvoorbeeld een winkelwagen, gevuld met boodschappen, die van een helling afrolt. Als we alleen geïnteresseerd zijn in de beweging van de wagen en bijvoorbeeld willen weten met welke snelheid hij tegen een muur zal botsen dan kan het voldoende zijn de hele wagen in de theorie met één deeltje weer te geven.

Vaak zijn er meerdere theoretische deeltjes nodig om een object of een systeem te beschrijven.

Bijvoorbeeld als we de bewegingen van de inhoud van het winkelwagentje mee willen nemen (om na te gaan of er iets zal breken), en de draaiïng van het wagentje, dan zal in ieder geval elk produkt in de wagen een deeltje zijn en het wagentje zelf wordt bijvoorbeeld beschreven door vier deeltjes, die de vier hoekpunten van het wagentje representeren.

Voor de meest volledige beschrijving die mogelijk is binnen de klassieke mechanica is het nodig het systeem opgebouwd te zien uit fundamentele deeltjes, de bouwstenen van het object.

4.2 de theorie van de 'gewone' klassieke mechanica en de definitie van het klassieke identieke deeltje

De toestand van een klassiek systeem op een moment is volledig gegeven door een punt in de bij het systeem behorende faseruimte. Hoewel het niet altijd de eenvoudigste of meest inzichtelijke keuze is, kan elk systeem in een faseruimte beschreven worden, die is opgespannen uit n plaats-coördinaten en n impulscoördinaten per deeltje, waarbij n = 1, 2 of 3 is de ruimtelijke dimensie waarin het systeem beschreven wordt. We zullen vanaf nu voor het gemak alleen dergelijke faseruimten beschouwen.

De toestand van een 3-dimensionaal systeem bestaande uit N deeltjes wordt gegeven door de waarden van de plaats- en impulscoördinaten, resp. x en p, in de drie richtingen voor elk deeltje:

$$(x_1, y_1, z_1, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, x_2, y_2, z_2, p_{x2}, \ldots\ldots\ldots x_N, y_N, z_N, p_{xN}, p_{yN}, p_{zN})$$

wat een punt in de faseruimte voorstelt.

De evolutie van het systeem wordt bepaald door de klassieke Hamiltoniaan, H. H is ook uitgedrukt in dezelfde coördinaten x en p. Elk deeltje heeft specifieke eigenschappen die van invloed zijn op de evolutie van het systeem. Deze zitten verwerkt in H, die de waarden van de grootheden die bij deze eigenschappen horen, als parameters bevat.

In het voorbeeld van het winkelwagentje zijn deze grootheden bijvoorbeeld de massa, wrijvingscoëfficienten, traagheidsmomenten en afmetingen.

Uit de verschillende waarden van de parameters in de Hamiltoniaan blijkt dus het verschil tussen de deeltjes.

Als nu twee deeltjes precies dezelfde, voor de beschrijving van de evolutie van een systeem benodigde, eigenschappen hebben, dan zijn de parameterwaarden die bij deze deeltjes horen in H gelijk. Dat maakt dat de Hamiltoniaan invariant is onder verwisseling van de twee deeltjesindices. Met andere woorden de Hamiltoniaan is dan symmetrisch in de twee deeltjesindices. We noemen deeltjes waarvoor geldt dat H invariant is onder verwisseling van de indices, *klassieke identieke deeltjes.*

In het voorbeeld van het winkelwagentje kunnen twee potten jam, die gelijke afmeting en massa hebben, maar van elkaar verschillen in kleur en smaak, binnen het systeem klassieke identieke deeltjes zijn. Dit heeft te maken met het feit dat de kleur en smaak niet tot de parameters behoren die van onverwaarloosbare invloed zijn op de beschrijving van de evolutie van het systeem. Pas indien ik een waarnemer of kleurdetector binnen het systeem breng, moet de kleur ook in H voorkomen en zijn de twee potten jam dus niet meer identiek.

Het hangt dus af van de vorm van H of twee klassieke deeltjes identiek zijn of niet.

In appendix B wordt besproken dat in de praktijk ook wel systemen van identieke deeltjes door een Hamiltoniaan beschreven kunnen worden die niet symmetrisch is in de deeltjesindices. Denk bijvoorbeeld aan een systeem dat bestaat uit twee deelsystemen die geen interactie hebben met elkaar zoals een knikker op een hellend vlak en een identieke knikker aan een veer. Het is dan echter altijd mogelijk en in feite meer correct de evolutie van het systeem met een Hamiltoniaan te beschrijven die wel symmetrisch is in de deeltjesindices. We moeten dus eigenlijk de definitie van klassieke identieke deeltjes uitbreiden als volgt.

We noemen deeltjes uit een systeem waarvoor geldt dat het door een Hamiltoniaan beschreven *kan* worden die invariant is onder verwisseling van de betreffende deeltjesindices, klassieke identieke deeltjes. We gaan er in het vervolg vanuit dat voor systemen van identieke deeltjes H symmetrisch is in de betreffende deeltjesindices.

4.3 klassieke mechanica met symmetriseringsvoorschrift

Beschouw een systeem waarin meerdere identieke deeltjes voorkomen, bijvoorbeeld twee dezelfde potten jam in een winkelwagentje. Elk deeltje krijgt een eigen deeltjesindex. De twee potten jam zijn bijvoorbeeld deeltje 1 en deeltje 2. De keuze om aan de ene pot nummer 1 toe te kennen en aan de andere nummer 2 is volkomen willekeurig. Bij verwisseling van deze twee nummers blijft H exakt hetzelfde. Ook alle meetbare grootheden, die altijd symmetrisch zijn in de deeltjesindices van identieke deeltjes, blijven gelijk. Verwisseling van de deeltjesindices maakt empirisch dus in het geheel geen verschil. Daarentegen wordt het punt in de faseruimte, dat de toestand van het systeem weergeeft, wel anders bij verwisseling van de deeltjesindices. Bijvoorbeeld de toestand in een 1-dimensionaal twee-deeltjes-systeem:

$$(x_1, p_1, x_2, p_2) = (1,2,3,4)$$

wordt onder verwisseling van de deeltjesindices de toestand:

$$(x_1, p_1, x_2, p_2) = (3,4,1,2)$$

Er zijn dus twee punten in de faseruimte die empirisch gezien hetzelfde weergeven.

In het algemeen zijn er in een systeem met N identieke deeltjes, bij één toestand waarin het systeem zich bevindt, N! verschillende punten in de faseruimte, verkregen door alle permutaties van de deeltjesindices, die allemaal voor de empirie hetzelfde betekenen. Er is geen enkele reden om het ene punt boven het andere te verkiezen. Er wordt in de beoefening van de klassieke mechanica normaal gesproken dus kunstmatig een punt gekozen, dat de toestand van het systeem voorstelt. Daarmee liggen dan de deeltjesindices vast. Door deze deeltjesindices-toekenning krijgt elk deeltje dus een index, waardoor het individualiseerbaar is. De index maakt dat er een deeltje 1 en een deeltje 2 is enzovoort. De deeltjesindex is dezelfde als de coördinaatas-index van het coördinatenstelsel dat de faseruimte opspant.

Maar nogmaals, elk ander punt van de N! genoemde punten zou evengoed voldoen om de toestand van het systeem weer te geven. We kunnen nu stellen dat het veel mooier zou zijn als bij verwisseling van de deeltjes-indices van identieke deeltjes, behalve de meetbare grootheden, ook de toestand van het systeem niet zou veranderen. Dit zou ook veel beter aansluiten bij de quantummechanica waarin ook de toestand van een systeem van identieke deeltjes symmetrisch is of anti-symmetrisch. Om dit te verkrijgen moet er in klassieke mechanica, net als in de quantummechanica, ook een soort symmetriseringsvoorschrift gelden.

Het is heel eenvoudig de klassieke mechanica zo te modificeren dat er een symmetriseringsvoorschrift geldt, dat stelt dat de toestanden in een systeem van identieke deeltjes symmetrisch moeten zijn in alle coördinaatas-indices, die bij de identieke deeltjes horen. Een toestand in de gemodificeerde klassieke mechanica wordt dan niet beschreven door een punt in de faseruimte, maar door de verzameling van alle bovengenoemde N! punten. Bijvoorbeeld een toestand van een systeem dat bestaat uit drie identieke deeltjes in de 1-deeltjestoestanden a, b, en c, waarbij

$a = (x_a, y_a, z_a, p_{xa}, p_{ya}, p_{za})$

$b = (x_b, y_b, z_b, p_{xb}, p_{yb}, p_{zb})$

$c = (x_c, y_c, z_c, p_{xc}, p_{yc}, p_{zc})$

kan in de gewone klassieke mechanica geschreven worden als

$$(a^1, b^2, c^3) \tag{4.1}$$

en in de gemodificeerde klassieke mechanica als:

$$\{(a^1,b^2,c^3),(a^1,c^2,b^3),(b^1,a^2,c^3),(c^1,a^2,b^3),(b^1,c^2,a^3),(c^1,b^2,a^3)\} \tag{4.2}$$

waarbij de bovenindex de coördinaatas-index in de faseruimte aangeeft. Deze bovenindices worden meestal weggelaten, omdat ze al in de volgorde van de notatie tot uitdrukking komen. Merk op dat de toestand symmetrisch is in de deze indices.

Een toestand in de gemodificeerde klassieke mechanica is dus altijd en verzameling van toestanden uit de gewone klassieke mechanica. En een toestand in de gemodificeerde klassieke mechanica is altijd symmetrisch in de coördinaatas-indices die bij een systeem van identieke deeltjes horen. Op alle N! punten werkt dezelfde H als in de gewone, niet gemodificeerde, klassieke mechanica. H moet nu dus als het ware N! keer zo hard werken omdat hij de evolutie van alle N! punten moet genereren.

Het is niet moeilijk in te zien dat de gewone klassieke mechanica en de gemodificeerde klassieke mechanica empirisch equivalent zijn. Beschouw daartoe een systeem dat uit N identieke deeltjes bestaat en waarvan de evolutie door de Hamiltoniaan H_1 beschreven wordt met begintoestand x_{o1} en eindtoestand x_{e1} in de gewone klassieke mechanica. In de gemodificeerde klassieke mechanica kan dezelfde evolutie beschreven worden. De begintoestand is dan de vezameling van de punten in de faseruimte die ofwel gelijk zijn aan x_{o1} ofwel alleen van x_{o1} verschillen door verwisselde coördinaatas-indices. We noteren deze verzameling als $\{x_{o1}, \,..\, , x_{oN!}\}$. Op elk punt werkt nu dezelfde Hamiltoniaan, H_1, als hierboven genoemd, die invariant is onder verwisseling van de coördinaatas-indices. Dit geldt immers voor een Hamiltoniaan van een systeem van identieke deeltjes. Het punt x_{o1} evolueert dus naar het punt x_{e1}. Omdat de andere beginpunten voor de empirie dezelfde toestand voorstellen als x_{o1} evolueren zij ook naar punten die voor de empirie hetzelfde voorstellen als x_{e1}. Daarmee is eenvoudig in te zien dat de verzameling van alle eindtoestanden de verzameling is van alle punten in de faseruimte die ofwel gelijk zijn aan x_{e1} ofwel alleen van x_{e1} verschillen door verwisselde coördinaatas-indices. We kunnen deze noteren als de verzameling

$\{x_{e1}, .. ,x_{eN!}\}$. We zien dat de evolutie van x_{o1} naar x_{e1} in de gewone klassieke mechanica empirisch dezelfde is als de evolutie van $\{x_{o1}, .. ,x_{oN!}\}$ naar $\{x_{e1}, .. ,x_{eN!}\}$ in de gemodificeerde klassieke mechanica. Beide theorieëen zijn dus empirisch equivalent.

We definiëren een andere notatie voor de toestand (4.2). De toestand (4.2) representeert precies dezelfde toestand als:

$$\{\{a,b,c\}\} \qquad (4.3)$$

In deze notatie zijn geen coördinaatas-indices meer. De dubbele accolades geven aan dat het gaat om de verzameling van alle punten in de faseruimte die uit de drie 1-deeltjes-toestanden a, b en c bestaan. De gemodificeerde klassieke mechanica kan ook, in deze notatie geïntroduceerd worden. De evolutie van het systeem is dan zo gedefiniëerd dat de hamiltoniaan werkt op de toestand {{a,b,c}} precies zo als de hamiltoniaan in de gewone klassieke mechanica op de toestand (a,b,c) zou werken. Dit vereenvoudigt de bewerkelijkheid van het werken met de gemodificeerde klassieke mechanica en illustreert tevens nog eens duidelijk de overeenkomst tussen de gewone en de gemodificeerde klassieke mechanica.

Tot nu toe is de niet-statistische klassieke mechanica besproken en gemodificeerd. Daarin wordt elke toestand van een N-deeltjessysteem beschreven door één punt in de faseruimte in de gewone klassieke mechanica en N! punten in de faseruimte in de gemodificeerde klassieke mechanica. We zullen deze toestanden zuivere klassieke toestanden noemen.

We zullen nu ook de statistische klassieke mechanica modificeren. In de gewone statistische klassieke mechanica kan een toestand van een systeem weergegeven worden door een verzameling punten in de faseruimte, waarbij aan elk punt een bepaald gewicht toegekend wordt, of door een dichtheidsverdeling over punten in de faseruimte. We zullen een dergelijke toestand een klassiek gemengde toestand noemen.

Dezelfde toestand kan in de gemodificeerde statistische klassieke mechanica weergegeven worden door een verzameling van toestanden in de gemodificeerde klassieke mechanica, waarbij aan elke toestand een bepaald gewicht toegekend wordt, of door een dichtheidsverdeling over deze toestanden. Een toestand in de gemodificeerde statistische klassieke mechanica bevat dus N!.n punten in de faseruimte, waarbij n=1,2,3.... of is een dichtheidverdeling die hetzelfde is voor alle N! punten in de faseruimte. Een dergelijke toestand, die niet slechts door N! punten in de faseruimte wordt beschreven, noemen we een klassiek gemengde toestand in de gemodificeerde statistische klassieke mechanica.

We hebben nu een nieuwe theorie geïntroduceerd, de gemodificeerde klassieke mechanica, waarin ook een symmetriseringsvoorschrift geldt. Merk op dat de symmetrisering hierin niet precies hetzelfde is als in de quantummechanica. In de quantummechanica geldt het superpositieprincipe, dat stelt dat een superpositie van twee mogelijke toestanden weer een mogelijke toestand van het systeem is. Dit maakt dat toestanden symmetrisch of anti-symmetrisch gemaakt kunnen worden door toestanden bij elkaar op te tellen of af te trekken. Dit superponeren is in de (niet-statistische) klassieke mechanica niet mogelijk. Er is ook niets wat lijkt op superponeren. De in de klassieke mechanica voorgestelde symmetrisering kent dan ook alleen symmetrische toestanden en geen anti-symmetrische.

We kunnen ook opmerken dat het symmetriseringsvoorschrift in de klassieke mechanica de volgende formuleringen kan hebben:

klassiek symmetriseringsvoorschrift A

De toestand van een systeem moet symmetrisch zijn onder verwisseling van de coördinaatas-indices.

klassiek symmetriseringsvoorschrift B:

De toestand van het systeem dat alle deeltjes van een soort in het gehele universum bevat is symmetrisch onder verwisseling van de coördinaatas-indices.

Omdat het in de gemodificeerde klassieke mechanica empirisch geen enkel verschil maakt of een toestand wel of niet gesymmetriseerd is, zijn beide formuleringen van het symmetriseringsvoorschrift empirisch equivalent.

De reden om deze gemodificeerde klassieke mechanica te introduceren is dat deze een analogie vertoont met de quantummechanica wat betreft het individualisatieprobleem voor (groepen) deeltjes zonder overlap. Dit zal in het volgende hoofdstuk uitgebreid besproken worden.

We kunnen ook opmerken, aan de hand van Appendix B, dat er een analogie is in de relatie tussen het symmetrisch zijn van de toestanden en het symmetrisch zijn van de observabelen in de quantummechanica en grootheden in de gemodificeerde klassieke mechanica. In beide theorieën geldt dat het symmetriseringsvoorschrift niet afleidbaar is uit de symmetrie van de observabelen of grootheden. Omgekeerd kan met niet-symmetrische observabelen of grootheden gewerkt worden, als er sprake is van een systeem dat bestaat uit twee systemen die geen interactie hebben met elkaar.

5 de analogie in de individualiseerbaarheid van klassieke identieke deeltjes en quantummechanische identieke deeltjes zonder overlap

5.1 De deeltjesindicestoekenning in de gewone klassieke mechanica en in de gemodificeerde klassieke mechanica

Beschouw een 2-deeltjessysteem in de gewone klassieke mechanica, met deeltje 1 in toestand a en deeltje 2 in toestand b, waarbij

$a = (x_a, y_a, z_a, p_{xa}, p_{ya}, p_{za})$

$b = (x_b, y_b, z_b, p_{xb}, p_{yb}, p_{zb})$

De toestand van het systeem kan dan geschreven worden als:

$$(a^1, b^2) \qquad (5.1)$$

Hierin is de bovenindex de coördinaatas-index. Deze wordt meestal weggelaten in de notatie. We zien dat de deeltjesindex gelijk is aan de coördinaatas-index. Maar we kunnen opmerken dat we de verschillende deeltjes ook kunnen onderscheiden door de verschillende toestand waarin ze zich bevinden. We kunnen kunstmatig aan elke 1-deeltjestoestand een index hangen waardoor de toestand (5.1) geschreven wordt als

$$(a_1^1, b_2^2)$$

Deze onderindex speelt geen enkele rol in de theorie. Hij is er alleen aangehangen om als deeltjesindex te dienen. We noemen deze index een toestand-index. We kunnen nu zeggen dat bij de niet-gesymmetriseerde toestand (5.1) als deeltjesindex zowel de coördinaatas-index als de toestand-index genomen kan worden.

Er is echter wel een verschil. Als toestand-indices als deeltjesindices worden genomen, dan moet men goed tijdens de evolutie van een systeem, de evolutie van de afzonderlijke 1-deeltjestoestanden volgen, wil men in de eindtoestand dezelfde deeltjesindices aan dezelfde deeltjes toekennen als in de begintoestand. Elke 1-deeltjestoestand verandert immers tijdens de evolutie en het hoeft niet altijd duidelijk te zijn welke toestand naar welke toestand is geëvolueerd als alleen naar de begin- en eindtoestanden wordt gekeken.

Als alleen naar de begin- en eindtoestanden wordt gekeken, is de deeltjesindicestoekenning met toestand-indices als deeltjesindices niet eenduidig. Als de begintoestand van een tweedeeltjessysteem bijvoorbeeld (a,b) is en de eindtoestand (c,d), dan kan men ofwel zeggen dat het ene deeltje geëvolueerd is van a naar c en het andere van b naar d ofwel dat het ene deeltje geëvolueerd is van a naar d en het andere van b naar c.

Alleen als gedurende de evolutie van een 1-deeltjestoestand de toestand-index eraan is blijven hangen, kan de eindtoestand geschreven worden als (c_1, d_2) bij de begintoestand (a_1, b_2) en is aan de toestand-index af te lezen dat het ene deeltje is geëvolueerd van a naar c en het andere van b naar d. De theorie zorgt er echter niet voor dat de index aan de 1-deeltjestoestand blijft hangen. Men moet er kunstmatig voor zorgen dat dit gebeurt door de evolutie te volgen. In dit geval, waarin we in de gewone klassieke mechanica werken, is hier wel erg eenvoudig onderuit te komen, door te stellen dat de toestand-index gelijk moet blijven aan de coördinaatas-index. Dit zal in het vervolg echter niet altijd zo zijn.

Als de coördinaatas-indices als deeltjesindices worden genomen, zijn de deeltjes wel alleen uit de begin- en eindtoestand op een eenduidige manier gedefiniëerd. In het bovenstaande voorbeeld is dan direkt te zien dat het ene deeltje geëvolueerd is van a naar c en het andere van b naar d.

Om te kunnen werken in de gemodificeerde klassieke mechanica moeten we de toestand (5.1) symmetriseren. Deze wordt dan:

$$\{(a^1,b^2),(b^1,a^2)\} \qquad (5.2)$$

Voor een toestand van een klassiek systeem dat uit identieke deeltjes bestaat en gesymmetriseerd is, zoals de toestand (5.2), maakt het een groot verschil of de toestand-indices als deeltjesindices gekozen worden of de coördinaatas-indices.

Als we aannemen dat de coördinaatas-indices de deeltjesindices zijn, dan moeten alle deeltjes in dezelfde toestand zitten. De gehele toestand was immers symmetrisch in de coördinaatas-indices. Alle deeltjes zitten in een toestand die een verzameling is van alle 1-deeltjestoestanden die in de gehele toestand voorkomen. Dit is dus een klassiek gemengde toestand. Omdat de deeltjes ook al identiek zijn, zijn ze dus niet individualiseerbaar in deze deeltjesindicestoekenning.

Als we als deeltjes-indices de toestand-indices kiezen, die we verkrijgen door aan elke verschillende toestand een index te hangen, dan zit elk deeltje in een verschillende toestand. Deze deeltjes zijn wel individualiseerbaar. De evolutie van de 1-deeltjestoestanden moet wel weer gevolgd worden om de deeltjes hun index (of hun identiteit) te laten behouden.

Ter illustratie en verdieping van het bovenstaande beschouwen we een klassiek systeem dat uit twee identieke knikkers bestaat. Het mogen best een rode en een blauwe knikker zijn. We nemen aan dat de twee knikkers een evolutie ondergaan die zodanig is dat in de eindtoestand, een rusttoestand, de twee knikkers van plaats verwisseld zijn ten opzichte van de begintoestand, die ook een rusttoestand was.

Als we in de gewone klassieke mechanica werken dan kunnen we de begintoestand noteren als (a,b). De eindtoestand wordt daarmee (b,a). De toestanden zijn duidelijk verschillend omdat de coördinaatas-indices verwisseld zijn. Met coördinaatas-indices als deeltjesindices is de situatie van de van toestand verwisselde deeltjes direkt duidelijk. Met toestand-indices als deeltjesindices kan de begintoestand geschreven worden als (a_1,b_2) en de eindtoestand als (b_1,a_2), waarbij de juiste keuze van de onderindices uit de evolutie gebleken moet zijn. Ook dan is uit de begin- en eindtoestand duidelijk af te lezen dat beide deeltjes van toestand verwisseld zijn.

Als we in de gemodificeerde klassieke mechanica werken dan kunnen we de begintoestand noteren als {(a,b),(b,a)}. De eindtoestand is precies hetzelfde als de begintoestand.

Met de deeltjesindicestoekenning waarbij de deeltjesindices ccoördinaatas-indices zijn, zitten beide deeltjes zowel in de begin- als in de eindtoestand en ook gedurende de hele evolutie in dezelfde toestand. De deeltjes zijn niet individualiseerbaar en het verschil in de begin- en eindtoestanden is nergens aan te zien.

Met de deeltjesindicestoekenning met als deeltjesindices de toestand-indices is het verschil in begin- en eindtoestand wel aan te geven. De begintoestand kan immers genoteerd worden als $\{(a_1,b_2),(b_2,a_1)\}$ en als de evolutie gevolgd is kan de eindtoestand geschreven worden als $\{(a_2,b_1),(b_1,a_2)\}$. Merk nogmaals op dat voor de theorie de toestand-indices geen betekenis hebben. De toestand-indices zijn alleen toegevoegd om de toestanden te kunnen interpreteren, zodanig dat de identiteit van de deeltjes bewaard blijft tijdens de evolutie. Voor de theorie zijn de begintoestand en de eindtoestand in dit geval gelijk.

5.2 deeltjesindicestoekenning in de quantummechanica op gesymmetriseerde en niet gesymmetriseerde toestanden

De uiteenzetting hierboven geldt analoog in de quantum-mechanica. Hieronder zal ik precies dezelfde lijn volgen als in 5.1, met zoveel mogelijk dezelfde zinnen, zodat de analogie duidelijk zichtbaar wordt.

We beschouwen een 2-deeltjessysteem S dat uit twee deeltjes bestaat, die niet met elkaar overlappen. Het onderstaande geldt echter evengoed voor het geval dat S uit twee groepen deeltjes bestaat die elkaar niet overlappen. In hoofdstuk 2 hebben we aangetoond dat het voor de empirie geen verschil maakt of we de toestand van S symmetriseren of niet. We noteren de niet gesymmetriseerde toestand als

$$|\Psi_{NS}\rangle = |\varphi\rangle^1 |\psi\rangle^2 \tag{5.3}$$

Hierin is de bovenindex de 1-deeltjeshilbertruimte-index. Deze wordt meestal weggelaten in de notatie. Hier kunnen we spreken over deeltje 1 in toestand $|\varphi\rangle$ en deeltje 2 in toestand $|\psi\rangle$. We zien dat de deeltjesindex gelijk is aan de 1-deeltjeshilbert-ruimte-index. Maar we kunnen opmerken dat we de verschillende deeltjes ook kunnen onderscheiden door de verschillende toestand waarin ze zich bevinden. We kunnen kunstmatig aan elke 1-deeltjestoestand een index hangen waardoor de toestand (5.3) geschreven wordt als

$$|\Psi_{NS}\rangle = |\varphi_1\rangle^1 |\psi_2\rangle^2$$

De onderindex speelt geen enkele rol in de theorie. Hij is er alleen aangehangen om als deeltjesindex te dienen. We noemen deze index een toestand-index. We kunnen nu zeggen dat bij de niet gesymmetriseerde toestand (5.3) als deeltjesindex zowel de 1-deeltjeshilbertruimte-index als de toestand-index genomen kan worden.

Er is echter wel een verschil. Als toestand-indices als deeltjesindices worden genomen dan moet men goed tijdens de evolutie van een systeem, de evolutie van de afzonderlijke 1-deeltjestoestanden volgen, wil men in de eindtoestand dezelfde deeltjesindices aan dezelfde deeltjes toekennen als in de begintoestand. Elke 1-deeltjestoestand verandert immers tijdens de evolutie en het hoeft niet altijd duidelijk te zijn welke toestand naar welke toestand is geëvolueerd als alleen naar de begin en eindtoestanden wordt gekeken.

Als alleen naar de begin- en eindtoestanden wordt gekeken, is de deeltjesindicestoekenning met toestand-indices als deeltjesindices niet eenduidig. Als de begintoestand van een tweedeeltjessysteem bijvoorbeeld $|a\rangle|b\rangle$ is en de eindtoestand $|c\rangle|d\rangle$, dan kan men ofwel zeggen dat het ene deeltje geëvolueerd is van $|a\rangle$ naar $|c\rangle$ en het andere van $|b\rangle$ naar $|d\rangle$ ofwel dat het ene deeltje geëvolueerd is van $|a\rangle$ naar $|d\rangle$ en het andere van $|b\rangle$ naar $|c\rangle$.

Alleen als gedurende de evolutie van een 1-deeltjestoestand de toestand-index eraan is blijven hangen, kan de eindtoestand geschreven worden als $|c_1\rangle|d_2\rangle$ bij de begintoestand $|a_1\rangle|b_2\rangle$ en is aan de toestand-index af te lezen dat deeltje 1 is geëvolueerd van $|a\rangle$ naar $|c\rangle$ en deeltje 2 van $|b\rangle$ naar $|d\rangle$. De theorie zorgt er echter niet voor dat de index aan de 1-deeltjestoestand blijft hangen. Men moet er kunstmatig voor zorgen dat dit gebeurt door de evolutie te volgen. In dit geval, waarin we met niet-gesymmetriseerde toestanden werken, is hier wel erg eenvoudig onderuit te komen, door te stellen dat de toestand-index gelijk moet blijven aan de 1-deeltjeshilbertruimte-index. Dat zal in het vervolg echter niet altijd zo zijn.

Als de 1-deeltjeshilbertruimte-indices als deeltjesindices worden genomen zijn de deeltjes wel alleen uit de begin- en eindtoestand op een eenduidige manier gedefiniëerd. In het bovenstaande voorbeeld is dan direkt te zien dat het ene deeltje geëvolueerd is van $|a\rangle$ naar $|c\rangle$ en het andere van $|b\rangle$ naar $|d\rangle$.

De toestand van het systeem kan ook in zijn symmetrische vorm geschreven worden als volgt.

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\, |\varphi\rangle|\psi\rangle \pm |\psi\rangle|\varphi\rangle \} \qquad (5.4)$$

Voor een toestand van een quantummechanisch systeem dat uit identieke deeltjes bestaat en gesymmetriseerd is, zoals de toestand (5.4), maakt het een groot verschil of de toestand-indices als deeltjesindices gekozen worden of de 1-deeltjeshilbertruimte-indices.

Als we aannemen dat de 1-deeltjeshilbertruimte-indices de deeltjesindices zijn, dan is de toestand van een deeltje gelijk aan het partiële spoor naar de bijbehorende 1-deeltjeshilbertruimte. Door in (5.4) de partiële sporen te bepalen is te zien dat alle deeltjes dan in dezelfde gemengde toestand zitten. Dat was ook te verwachten omdat (5.4) symmetrisch is in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Omdat de deeltjes ook al identiek zijn, zijn ze dus niet individualiseerbaar in deze deeltjes-indicestoekenning.

Als we als deeltjes-indices de toestand-indices kiezen, die we verkrijgen door aan elke verschillende toestand een index te hangen, dan zit elk deeltje in een verschillende toestand. Deze deeltjes zijn wel individualiseerbaar. De evolutie van de 1-deeltjestoestanden moet wel weer gevolgd worden om de deeltjes hun index (of hun identiteit) te laten behouden.

We moeten hier opmerken dat het in het algemeen niet mogelijk is de evolutie van afzonderlijke quantummechanische deeltjes of groepen deeltjes te volgen. Het is echter eenvoudig in te zien, dat het in het geval dat de deeltjes of groepen deeltjes niet overlappen, wel mogelijk is. In dit geval kan namelijk, naast de evolutie van de volledig gesymmetriseerde toestand, de evolutie van de niet geheel gesymmetriseerde toestand gelegd worden. In de niet geheel gesymmetriseerde toestand zijn de subhilbertruimte-indices gelijk aan de toestand-indices. De verschillende toestanden worden in verschillende subhilbertruimten beschreven. De subhilbertruimte is altijd een 1-deeltjeshilbertruimte of een meer-deeltjeshilbertruimte. Deze blijft in de evolutie onaangeroerd. De evolutie van de in de subhilbertruimte beschreven toestand kan dus probleemloos gevolgd worden.

Ter illustratie en verdieping van het bovenstaande beschouwen we een quantummechanisch systeem dat uit twee identieke deeltjes bestaat, die niet overlappen. We nemen aan dat de twee deeltjes een evolutie ondergaan die zodanig is dat in de eindtoestand van het ene deeltje gelijk is aan de begintoestand van het andere deeltje en omgekeerd.

De niet gesymmetriseerde toestand kunnen we noteren als $|a\rangle|b\rangle$. De eindtoestand wordt daarmee $|b\rangle|a\rangle$. De toestanden zijn duidelijk verschillend omdat de 1-deeltjeshilbertruimte-indices verwisseld zijn. Met 1-deeltjeshilbertruimte-indices als deeltjesindices is de situatie van de van toestand verwisselde deeltjes direkt duidelijk. Met toestand-indices als deeltjesindices kan de begintoestand geschreven worden als $|a_1\rangle|b_2\rangle$ en de eindtoestand als $|b_1\rangle|a_2\rangle$, waarbij de juiste keuze van de onderindices uit de evolutie gebleken moet zijn. Ook dan is uit de begin- en eindtoestand duidelijk af te lezen dat beide deeltjes van toestand verwisseld zijn.

De gesymmetriseerde begintoestand is evenredig met $|a\rangle|b\rangle \pm |b\rangle|a\rangle$. De eindtoestand is precies hetzelfde als de begintoestand.

Met de deeltjesindicestoekenning waarbij de deeltjesindices 1-deeltjeshilbertruimte-indices zijn, zitten beide deeltjes zowel in de begin als in de eindtoestand en ook gedurende de hele evolutie in dezelfde toestand. De deeltjes zijn niet individualiseerbaar en het verschil in de begin- en eindtoestanden is nergens aan te zien.

Met de deeltjesindicestoekenning met als deeltjesindices de toestand-indices is het verschil in begin- en eindtoestand wel aan te geven. De begintoestand kan immers genoteerd worden als evenredig met $|a_1\rangle|b_2\rangle \pm |b_2\rangle|a_1\rangle$ en als de evolutie gevolgd is kan de eindtoestand geschreven worden als $|a_2\rangle|b_1\rangle \pm|b_1\rangle|a_2\rangle$. Merk nogmaals op dat voor de theorie de toestand-indices geen betekenis hebben. De toestand-indices zijn alleen toegevoegd om de toestanden te kunnen interpreteren, zodanig dat de identiteit van de deeltjes bewaard blijft tijdens de evolutie. Voor de theorie zijn de begintoestand en de eindtoestand in dit geval gelijk.

We hebben nu gezien dat de problematiek dat quantummechanische deeltjes niet individualiseerbaar zijn als 1-deeltjeshilbert-ruimte-indices als deeltjesindices worden gekozen zich analoog voordoet in de klassieke mechanica.

De mogelijkheid om toestand-indices als deeltjesindices te nemen is zowel klassiek als quantummechanisch aanwezig en heeft in beiden hetzelfde nadeel dat de evolutie gevolgd moet worden.

5.3 de individualiseerbaarheid van klassieke deeltjes

In het algemeen kunnen we stellen dat de deeltjes in de klassieke mechanica goed visualiseerbaar zijn en aansluiten bij objecten of delen daarvan die kunnen worden waargenomen. Daarom stellen we dat klassieke deeltjes altijd individualiseerbaar zijn. Een object heeft immers altijd en specifiek kenmerk dat maakt dat het anders is dan elk ander object doordat het zich in ieder geval altijd op een andere plaats bevindt. We stellen dus dat, als we bijvoorbeeld twee identieke guldens naast elkaar leggen, beide guldens een eigen identiteit hebben.

De vraag of er werkelijk zoiets bestaat als een identiteit is een filosofische en geen fysische vraag. Met geen mogelijkheid kunnen we met behulp van de fysica erachter komen of de twee guldens niet soms spontaan, zonder daarvoor tijd nodig te hebben, van plaats verwisselen. Als men aan zou nemen dat dat zou gebeuren dan zou men bijvoorbeeld kunnen zeggen dat de identiteit van de gulden in mijn hand steeds wisselt. Dit sluit niet aan bij de manier waarop er in het algemeen over de gulden in mijn hand gesproken wordt. Het blijft immers mijn gulden.

Omdat dergelijke spontane verwisselingen toch nooit opgemerkt kunnen worden, relateren we de identiteit van alle guldens en alle identieke objecten aan de plaats waarop ze zich bevinden en de continue evolutie die ze doormaken.

Resumerend kunnen we dus stellen dat in de klassieke mechanica met de term deeltje altijd een individualiseerbaar object bedoeld wordt, omdat de term rechtstreeks aansluit bij de waarneming. We willen dus in de klassieke mechanica een deeltjesindicestoekenning die hierbij aansluit.

5.4 de individualiseerbaarheid van quantummechanische deeltjes of groepen deeltjes zonder overlap

In 3.5 is de wenselijkheid van een deeltjesconcept in de quantummechanica, dat aansluit bij de manier waarop er in het algemeen over deeltjes wordt gesproken, al besproken. De term deeltje in de quantummechanica is rechtstreeks overgenomen uit de klassieke mechanica en ons intuïtieve deeltjesidee is hierop gebaseerd. Omdat het deeltje in de klassieke mechanica één van de meest funtamentele begrippen is, is het nauwelijks of niet weg te denken uit de gehele fysica. Een klassiek deeltje heeft een zeer nauwe band met de waarnemingen en is uitstekend visualiseerbaar. Alle waarnemingen, ook de waarnemingen van quantummechanische experimenten, worden meestal uitgedrukt door het onderscheiden van objecten of delen daarvan. Deze hebben een direkte relatie met de klassieke deeltjes. Daarom is het bijna onontkoombaar dat de term deeltje ook in de quantummechanica opduikt. De term deeltje wordt in de quantummechanica dan ook veelvuldig gebruikt, ondanks dat het problematisch is en niet eenduidig gedefiniëerd zoals we in hoofstuk 1 en 2 hebben gezien.

We willen in deze scriptie een deeltjesconcept in de quantummechanica introduceren, waarin de term deeltje zoveel mogelijk aansluit bij het klassieke deeltje. We weten dat een quantummechanisch deeltje nooit alle eigenschappen kan hebben van een klassiek deeltje. In de quantummechanica zal de term deeltje dus altijd iets anders betekenen dan in de klassieke mechanica. We willen wel dat er zoveel mogelijk overeenkomsten zijn tussen klassieke deeltjes en quantummechanische deeltjes. Als er immers in het geheel geen overeenkomst zou zijn tussen beide soorten deeltjes, dan zou het erg verwarrend zijn dat de term deeltje, die in de klassieke mechanica al een heel andere betekenis heeft, in de quantummechanica gebruikt wordt.

Klassieke deeltjes corresponderen altijd met waarneembare objecten. Quantummechanische deeltjes hebben slechts een relatie met de waarneming *na een meting*. Alleen na een meting is het dus mogelijk een relatie te leggen tussen quantummechanische deeltjes en klassieke deeltjes. In 5.4 is gesteld dat klassieke deeltjes altijd individualiseerbaar zijn. Het past dus hierbij te stellen dat quantummechanische deeltjes na een meting individualiseerbaar zijn. Met dezelfde woorden:

Gemeten deeltjes zijn altijd individualiseerbaar (5.5)

Bijvoorbeeld bij detectie van een proton, zodanig dat er een stip zichtbaar is, is (5.5) duidelijk. De stip correspondeert met het proton. We spreken dan van 'het gedetecteerde proton'. Het heeft door de detectie een kenmerk waarmee het zich onderscheidt van alle andere protonen.

(5.5) geldt niet alleen voor enkele deeltjes maar ook voor groepen van identieke deeltjes. Een groep van identieke deeltjes kan individualiseerbaar zijn ten opzichte van een andere groep.

Dit is al opgemerkt bij de definiëring van de term individualiseerbaarheid in 2.2.2. Dit is bijvoorbeeld het geval als we een systeem beschouwen van N elektronen in een stuk metaal. Theoretisch spreken we dan van een veeldeeltjessysteem dat uit N elektronen bestaat. De N elektronen zijn als geheel 'gemeten'. Op de een of andere manier is het stuk metaal voldoende afgescheiden van zijn omgeving. Dit was de meting. Het kan zijn dat deze meting er alleen uit bestond te kijken naar een stuk metaal of een stuk metaal te visualiseren en te beslissen dat er N elektronen in zitten. De waarde van N hoeft ook niet bekend te zijn. Het resultaat is dat we nu, na deze 'meting' kunnen spreken van *die* N elektronen in *dat* stuk metaal. De elektronen in het stuk metaal zijn dus als geheel individualiseerbaar ten opzichte van alle overige elektronen. Op dezelfde manier kan men spreken over het systeem van alle protonen op de maan. De verzameling van alle protonen op de maan is individualiseerbaar ten opzichte van bijvoorbeeld alle protonen op aarde. In (5.5) wordt dus met 'gemeten deeltjes' ook 'gemeten groepen deeltjes' bedoeld en het begrip 'meting' kan zeer ruim opgevat worden.

Er is een relatie tussen het theoretische begrip systeem en een waarneming of visualisatie van het in werkelijkheid bedoelde systeem. In feite is er elke keer dat er een systeem, anders dan het universum, gedefiniëerd wordt een 'meting' verricht. De deeltjes binnen het systeem zijn daardoor individualiseerbaar ten opzichte van alle andere deeltjes.

De stelling dat objecten en gemeten quantummechanische deeltjes individualiseerbaar zijn is bedoeld om onze waarnemingen op een handige en reeds lang bestaande manier uit te kunnen drukken in een taal. Door die individualiseerbaarheid kunnen we bijvoorbeeld spreken over 'het gedecteerde elektron dat afkomstig was uit die deeltjesversneller' en ook over 'het systeem S'.

Om het bovenstaande in de theorie tot uitdrukking te brengen, moeten we een eis stellen aan elke quantummechanische toestand, die opgevat kan worden als een quantummechanische toestand na een meting. Merk hierbij op dat elke quantummechanische toestand van een systeem, die niet de toestand van het gehele universum is, een toestand na een meting is, omdat, zoals hierboven al is opgemerkt, elke beschouwing van een systeem een meting impliceert. Voor elke toestand na een meting geldt in het algemeen dat de gemeten (groepen) deeltjes in zeer goede benadering niet overlappen met alle andere deeltjes. We kunnen nu de volgende eis stellen:

> De deeltjesindicestoekenning aan een quantummechanische toestand moet zodanig zijn dat deeltjes of groepen deeltjes, die niet met andere deeltjes overlappen, individualiseerbaar zijn. (5.6)

Hiermee is aan de eis (5.5) voldaan.

5.5 keuze van een deeltjesindicestoekenning aan deeltjes zonder overlap

In het begin van dit hoofdstuk zijn vier mogelijke klassieke deeltjesindicestoekenningen beschouwd. Hiervan voldoen er drie aan de eis die we hiervoor gesteld hebben, omtrent de individualiseerbaarheid van klassieke deeltjes, namelijk dat ze individualiseerbaar moeten zijn en hun index en dus identiteit gedurende de evolutie moeten behouden. De deeltjesindices-toekenning die hier niet aan voldoet is die die werkt op gesymmetriseerde toestanden en deeltjesindices gelijk stelt aan coördinaatas-indices. Deze moet dus verworpen worden.

De meest voor de hand liggende en eenvoudigste deeltjesindicestoekenning is die die deeltjesindices gelijk stelt aan coördinaatas-indices en alleen gedefiniëerd is in de niet gesymmetriseerde toestand. Hierbij hoeft immers niet de evolutie gevolgd te worden om de identiteit van de deeltjes te bewaren. Dit betekent dat men, om op een eenvoudige en duidelijke manier deeltjesindices in de toestanden te kunnen onderscheiden, het beste met de niet-gesymmetriseerde toestand kan werken. Dit hoeft echter niet. Men kan ook toestand-indices als deeltjes-indices nemen en in de gesymmetriseerde toestand werken. In beide gevallen verkrijgt men hetzelfde deeltjes-concept en zijn er op een eenduidige manier deeltjes gedefiniëerd.

Bovenstaande uiteenzetting geldt analoog in de quantummechanica. Hieronder is de gehele bovenstaande tekst van 5.5 gecopiëerd, waarbij de term 'klassiek' vervangen is door 'quantummechanisch', 'klassieke deeltjes' door 'quantummechanische deeltjes of groepen deeltjes zonder overlap' en 'coördinaatas-indices' door '1-deeltjeshilbertruimte-indices'. De begrijpende lezer hoeft dit dus niet meer door te lezen.

In het begin van dit hoofdstuk zijn vier mogelijke quantummechanische deeltjesindicestoekenningen beschouwd. Hiervan voldoen er drie aan de eis die we hiervoor gesteld hebben, omtrent de individualiseerbaarheid van quantummechanische deeltjes of groepen deeltjes zonder overlap, namelijk dat ze individualiseerbaar moeten zijn en hun index en dus identiteit gedurende de evolutie moeten behouden. De deeltjesindicestoekenning die hier niet aan voldoet is die die werkt op gesymmetriseerde toestanden en deeltjesindices gelijk stelt aan 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Deze moet dus verworpen worden.

De meest voor de hand liggende en eenvoudigste deeltjesindicestoekenning is die die deeltjesindices gelijk stelt aan 1-deeltjeshilbertruimte-indices en alleen gedefiniëerd is in de niet gesymmetriseerde toestand. Hierbij hoeft immers niet de evolutie gevolgd te worden om de identiteit van de deeltjes te bewaren. Dit betekent dat men, om op een eenvoudige en duidelijke manier deeltjesindices in de toestanden te kunnen onderscheiden, het beste met de niet-gesymmetriseerde toestand kan werken. Dit hoeft echter niet. Men kan ook toestand-indices als deeltjes-indices nemen en in de gesymmetriseerde toestand werken. In beide gevallen verkrijgt men hetzelfde deeltjes-concept en zijn er op een eenduidige manier deeltjes gedefiniëerd.

De op deze manier in de quantummechanica verkregen deeltjes zullen we q-deeltjes noemen. Voor quantummechanische toestanden van niet overlappende (groepen) deeltjes moet nader worden toegelicht, dat er op een eenduidige manier q-deeltjes of groepen q-deeltjes gedefiniëerd zijn. We hebben immers in 2.3.2 opgemerkt, bij de bespreking van deze deeltjesindicestoekenning dat deze niet altijd eenduidig is voor fermionsystemen. We kunnen elke anti-symmetrische toestand herschrijven in een vorm, waarin de 1-deeltjestoestanden anders zijn.

Er is echter een eenduidige deeltjesindicestoekenning te definiëren in gesymmetriseerde toestanden voor deeltjes of groepen deeltjes die niet overlappen. We zullen dit hieronder alleen aantonen voor deeltjes die niet overlappen. In het volgende hoofdstuk, in 6.3, zullen we het ook aantonen of op zijn minst aannemelijk maken voor groepen deeltjes. In het volgende hoofdstuk zullen we namelijk een groep van identieke deeltjes, die niet overlappen met alle andere deeltjes in een systeem, identificeren met een deelsysteem dat niet overlapt met de rest van het systeem. We zullen aannemelijk maken dat de toestand van een deelsysteem dat niet overlapt met de rest van het systeem eenduidig bepaald is. De toekenning van toestand-indices hieraan is dus eenduidig.

Als een golffunctie geschreven kan worden als een gesymmetriseerde produkttoestand van niet-overlappende 1-deeltjesgolffuncties, dan is er geen andere notatie voor deze golffunctie, die ook een gesymmetriseerde produkttoestand is van 1-deeltjesgolffuncties die elkaar niet overlappen. De notatie van een dergelijke toestand is dus uniek. Het bewijs van het bovenstaande noemen we het uniciteitsbewijs. Hieronder wordt dit eerst gegeven voor een twee-deeltjessysteem en vervolgens voor een meerdeeltjessysteem.

Beschouw een 2-deeltjessysteem in de toestand:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle \right) \tag{5.7}$$

waarbij $|\varphi_1\rangle$ en $|\varphi_2\rangle$ niet overlappen zodat geldt:

$$\langle\varphi_1|x^N|\varphi_2\rangle = 0 \quad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z} \tag{5.8}$$

Een andere notatie van $|\Psi\rangle$ in (5.7) als een gesymmetriseerde produkttoestand is:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle|\gamma\varphi_1 + \delta\varphi_2\rangle - |\gamma\varphi_1 + \delta\varphi_2\rangle|\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle \right) \tag{5.9}$$

waarbij voldaan is aan de voorwaarde:

Er geldt niet: $\alpha\neq0$ $\beta=0$ $\gamma=0$ $\delta\neq0$
en er geldt niet: $\alpha=0$ $\beta\neq0$ $\gamma\neq0$ $\delta=0$ (5.10)

en aan de voorwaarde: $\alpha\neq0$ of $\beta\neq0$ en $\gamma\neq0$ of $\delta\neq0$ (5.11)

Als immers niet voldaan is aan (5.10) dan is de notatie van (5.9) gelijk aan die van (5.7). En als niet voldaan is aan (5.11), dan is minstens één van de 1-deeltjesgolffuncties uit (5.9) de nulvector.

Stel nu dat de 1-deeltjesgolffuncties uit (5.9) niet met elkaar overlappen. Dan geldt:

$\langle\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2|x^N|\gamma\varphi_1 + \delta\varphi_2\rangle = 0$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$

daaruit volgt met (5.8):

$\gamma\alpha^* \langle\varphi_1|x^N|\varphi_1\rangle + \delta\beta^* \langle\varphi_2|x^N|\varphi_2\rangle = 0$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$ (5.12)

kies $N=0 \Rightarrow \gamma\alpha^* = -\delta\beta^*$ (5.13)

Uit (5.12) met (5.13) volgt:

$\gamma\alpha^* (\langle\varphi_1|x^N|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_2|x^N|\varphi_2\rangle) = 0$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\gamma\alpha^* = 0$ of $\langle\varphi_1|x^N|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|x^N|\varphi_2\rangle$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$ (5.14)

Beschouw eerst de eerste vergelijking van (5.14).

$\gamma\alpha^* = 0 \Rightarrow$

$\gamma = 0$ of $\alpha = 0$

$\gamma = 0 \overset{(5.11)}{\Rightarrow} \delta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha = 0 \overset{(5.11)}{\Rightarrow} \beta \neq 0$

$\gamma = 0$, $\delta \neq 0 \overset{(5.13)}{\Rightarrow} \beta = 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$, $\beta \neq 0 \overset{(5.13)}{\Rightarrow} \delta = 0$

$\beta = 0 \overset{(5.11)}{\Rightarrow} \alpha \neq 0$ $\qquad$ $\delta = 0 \overset{(5.11)}{\Rightarrow} \gamma \neq 0$

maar in beide gevallen is hiermee (5.10) geschonden.

De tweede vergelijking uit (5.14) is:

$\langle\varphi_1|x^N|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2|x^N|\varphi_2\rangle$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$

daaruit volgt, volgens een bekende stelling uit de wiskunde, dat het plaatsgebonden deel van $|\varphi_1\rangle$ gelijk is aan het plaatsgebonden deel van $|\varphi_2\rangle$. Daarmee is (5.8) geschonden.

Hieruit volgt dat de 1-deeltjesgolffuncties uit (5.9) wel met elkaar overlappen. Hiermee is het uniciteitsbewijs voor een twee-deeltjesfermionsysteem gegeven.

Merk op dat alleen in het hierboven beschouwde geval dat het 2-deeltjessysteem een fermionsysteem is, de golffunctie (5.7) in een andere notatie geschreven kan worden zoals (5.9). Als er in (5.7) een plus-teken zou staan, dan is er geen andere notatie, die een gesymmetriseerde produkttoestand is. Hiermee is het uniciteitsbewijs ook voor een twee-deeltjesbosonsysteem gegeven.

Beschouw een systeem met n identieke deeltjes in de toestand:

$$|\Psi\rangle = \sum_P (-1)^P |\varphi_{P1}\rangle|\varphi_{P2}\rangle|\varphi_{P3}\rangle\ldots|\varphi_{Pn}\rangle \qquad (5.15)$$

waarin P een permutatie voorstelt en alle 1-deeltjesgolffuncties $|\varphi_i\rangle$ niet overlappen, zodat geldt:

$$\langle\varphi_i|x^N|\varphi_j\rangle = 0 \text{ voor alle } N \in \mathbb{Z} \text{ en } i = 1..n,\ j = 1..n \text{ en } i \neq j \qquad (5.16)$$

Elke andere notatie van (5.15) als een gesymmetriseerde produkttoestand bevat 1-deeltjesgolffuncties die een superpositie zijn van de golffuncties $|\varphi_1\rangle$ t/m $|\varphi_n\rangle$. Er kan daarin altijd minstens één paar golffuncties gevonden worden, die geschreven kunnen worden als:

$$c_1\,|\varphi_1\rangle + c_2\,|\varphi_2\rangle + \ldots\ldots\ldots\ldots c_n\,|\varphi_n\rangle$$

$$c_1'\,|\varphi_1\rangle + c_2'\,|\varphi_2\rangle + \ldots\ \ldots\ldots c_n'\,|\varphi_n\rangle \qquad (5.17)$$

en waarvoor geldt dat minstens één van de termen: $c_i\,c_i'$ met $i = 1..n$ ongelijk aan nul is. Dit is (eenvoudig) na te gaan. Er moeten immers n golffuncties geconstrueerd worden, die een superpositie zijn van de n golffuncties $|\varphi_1\rangle$ t/m $|\varphi_n\rangle$. Wil men niet op dezelfde notatie uitkomen als (5.15) dan zal in minstens twee golffuncties twee keer eenzelfde $|\varphi_i\rangle$ moeten voorkomen.

Stel nu dat de twee golffuncties uit (5.17) niet met elkaar overlappen. Dan geldt:

$$c_1^*c_1'\langle\varphi_1|x^N|\varphi_1\rangle + c_2^*c_2'\langle\varphi_2|x^N|\varphi_2\rangle + \ldots\ c_n^*c_n'\langle\varphi_n|x^N|\varphi_n\rangle = 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z}$$

dit kunnen we ook schrijven als:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^*c_i'\ \langle\varphi_i|x^N|\varphi_i\rangle = 0 \quad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow$$

$\langle\psi|x^N|\psi\rangle = 0$ met $|\psi\rangle = \sum \sqrt{c_i^* c_i'}\ |\varphi_i\rangle$ voor alle $N \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad |\psi\rangle = 0$

Neem nu in de som alleen de waarden van i mee waarvoor geldt dat $c_i c_i' \neq 0$ en dus ook $c_i^* c_i' \neq 0$. We kunnen dit aangeven door een accentteken aan de som te hangen. We kunnen nu schrijven:

$$|\psi\rangle = \sum_i{}' \sqrt{c_i^* c_i'}\ |\varphi_i\rangle \quad = \quad 0 \qquad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z}$$

Beschouw nu een 1-deeltjesgolffunctie $|\varphi_k\rangle$ waarbij de k zodanig is dat $c_k^* c_k' \neq 0$. Daarvoor kunnen we nu schrijven:

$$|\varphi_k\rangle = \sum_{i \neq k}{}' \frac{\sqrt{c_i^* c_i'}}{\sqrt{c_k^* c_k'}}\ |\varphi_i\rangle \qquad \Rightarrow$$

$$\langle\varphi_k|x^N|\varphi_k\rangle = \sum_{i \neq k}{}' \frac{\sqrt{c_i^* c_i'}}{\sqrt{c_k^* c_k'}}\ \langle\varphi_k|x^N|\varphi_i\rangle \overset{(5.16)}{=} 0 \qquad \forall N \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \qquad |\varphi_k\rangle = 0$

Maar $|\varphi_k\rangle$ is niet nul omdat dit één van de golffuncties is uit (5.15). Dus de twee golffuncties uit (5.17) overlappen elkaar wel. Hiermee is aangetoond dat er slechts één notatie is, die een gesymmetriseerde produkttoestand is, waarin de 1-deeltjes-golffuncties elkaar niet overlappen, namelijk (5.15).

Omdat er voor een gesymmetriseerde produkttoestand van een bosonsysteem ook slechts één notatie is, is hiermee het uniciteitsbewijs gegeven.

We eisen nu dat de notatie van elke toestand zodanig is dat, indien dat mogelijk is, alle 1-deeltjestoestanden elkaar niet overlappen. Als nu een toestand geschreven kan worden als een toestand die is opgebouwd uit 1-deeltjestoestanden die elkaar niet overlappen, dan zijn deze 1-deeltjestoestanden uniek bepaald. Hiermee is aangetoond dat de deeltjesindicestoekenning met toestand-indices als deeltjesindices eenduidig is als alle deeltjes niet ovelappen. Hiermee en met hetgeen in 6.3 nog aangetoond zal worden, kunnen we op een eenduidige manier toestand-indices toekennen aan deeltjes of groepen deeltjes die niet overlappen. We moeten daartoe eisen dat de toestand van het systeem zodanig geschreven is, dat de 1-deeltjestoestanden zoveel mogelijk niet overlappen. Aan de niet-overlappende (groepen) 1-deeltjestoestanden kunnen dan toestand-indices worden toegekend, waarmee op een eenduidige manier individualiseerbare deeltjes of groepen deeltjes zijn gedefiniëerd.

We moeten hierbij echter wel een kanttekening plaatsen. We hebben tot nu toe alleen toestanden beschouwd, die opgebouwd zijn uit N 1-deeltjestoestanden, zodat de toestand van het systeem altijd als een gesymmetriseerde produkttoestand geschreven kan worden. In het algemeen kan een systeem zich ook in een toestand bevinden die een superpositie is van twee verschillende van dergelijke toestanden, zoals de toestand (2.4) in 2.3.2. De deeltjesindicestoekenning in deze toestand is niet eenduidig, zoals is opgemerkt in 2.3.2. We kunnen wel zeggen dat de toestand van het systeem in een superpositie is van toestanden waarop de deeltjesindicestoekenning wel eenduidig is. Het probleem van de visualisatie en interpretatie hiervan hoort bij het algemene probleem van de visualisatie en interpretatie van superposities van toestanden in de quantummechanica. Dit wordt wel het meetprobleem genoemd. Het is dus niet specifiek een probleem dat te maken heeft met het feit dat het systeem identieke deeltjes bevat.

We kunnen hierbij nog opmerken dat in systemen waarvan de evolutie ook in goede benadering met behulp van de klassieke mechanica beschreven zou kunnen worden, dergelijke superposities niet voorkomen of slechts verwaarloosbaar veel van elkaar verschillen. We komen hierop terug in 5.7.

In 2.3.2 is ook opgemerkt dat, als gebruik wordt gemaakt van de door ons aangenomen deeltjesindicestoekenning, met q-deeltjes, er correlatieproblemen tussen de deeltjes of groepen deeltjes zijn, zoals besproken in 1.2. De correlatieproblemen treden echter niet op voor deeltjes of groepen deeltjes die niet met andere deeltjes overlappen.

Voor de correlatie die optreedt binnen een gegeven toestand is dit eenvoudig in te zien. Deze correlatie was immers een direkt gevolg van het feit dat de golffunctie gesymmetriseerd en daardoor in een superpositie was. In systemen waarin deeltjes of groepen deeltjes niet overlappen hoeven de golffuncties niet geheel gesymmetriseerd te zijn. Er kan daarom geen correlatie zijn tussen niet overlappende (groepen) deeltjes, die niet een gevolg is van interactietermen in de hamiltoniaan.

Ook voor de correlatie tussen toestanden, die optreedt in systemen waarop Bose-Einstein of Fermi-Dirac statistiek kan worden toegepast, geldt dat deze niet optreedt tussen deeltjes die niet overlappen. Een noodzakelijke voorwaarde voor het kunnen toepassen van deze statistiek is immers weer het symmetrisch zijn van de golffunctie. Dat is iets wat niet noodzakelijk is bij niet overlappende deeltjes of groepen deeltjes.

We kunnen concluderen dat de deeltjesindicestoekenning met q-deeltjes, als we het probleem met de superposities niet meetellen, onproblematisch is voor deeltjes of groepen deeltjes, die niet overlappen met andere deeltjes.

5.6 Een deeltjesindicestoekenning aan deeltjes met overlap en de problemen hieraan

Tot nu toe hebben we alleen gesproken over quantummechanische deeltjes of groepen deeltjes die niet overlappen. De deeltjesindicestoekenning, waarbij deeltjesindices gelijk zijn aan toestand-indices is hiervoor onproblematisch en zeer geschikt. We zullen nu ook een deeltjesindicestoekenning definiëren voor alle quantummechanische toestanden.

Voor deeltjes of groepen deeltjes die wel overlappen met andere deeltjes binnen het systeem, zoals alle deeltjes en alle groepen deeltjes binnen een veeldeeltjessysteem, kunnen ook toestand-indices aan de verschillende toestanden toegekend worden, zodat er q-deeltjes gedefiniëerd zijn. Dit is echter in het geheel niet onproblematisch.

Allereerst is deze deeltjesindicestoekenning niet eenduidig, zoals we gezien hebben in 2.3.2. Overigens kan de evolutie van een q-deeltje of een groep q-deeltjes niet eenduidig gevolgd worden. Een meting op een deeltje verandert bijvoorbeeld in het algemeen de toestand van de andere q-deeltjes zodanig, dat niet te achterhalen is uit welke 1-deeltjestoestand, die voor de meting deel uitmaakte van de toestand van het systeem, de toestand van een q-deeltje na een meting geëvolueerd is. Er is dus ook niet aan te geven welk q-deeltje, van alle q-deeltjes die voor de meting deel uitmaakten van het systeem, het gemeten deeltje is.

Deze verschijnselen zijn het gevolg van het feit dat, door de noodzakelijke symmetrisering van de toestand van het systeem, deze een superpositie is, waardooor er correlaties optreden tussen de 1-deeltjestoestanden, die niet door de hamiltoniaan van het systeem beschreven worden. Deze horen dus ook bij de correlatieproblemen die in 1.2 besproken zijn en die zich in dit geval ook voordoen.

Ook is er behalve de correlatieproblemen en het probleem dat de deeltjesindicestoekenning niet eenduidig is, een individualisatieprobleem omdat bosonen in de dezelfde toestand kunnen zitten.

Al met al kunnen we stellen dat de deeltjesindicestoekenning die q-deeltjes genereert zeer problematisch is in het geval dat er overlap is tussen de identieke deeltjes van het systeem.

In 5.5 hebben we een deeltjesindicestoekenning gedefiniëerd voor deeltjes zonder overlap. In feite was daarmee ons doel bereikt. We hebben daarmee immers een representatie in de theorie voor gemeten deeltjes of gemeten groepen deeltjes. 'De protonen binnen een veeldeeltjessysteem' of 'dat gedetecteerde elektron', waarover gesproken kan worden, kunnen nu in de notatie van de toestand herkend worden.

In plaats van ook q-deeltjes te definiëren voor 1-deeltjestoestanden met overlap, zoals we hierboven gedaan hebben kunnen we het ook hierbij laten. In dat geval stellen we dat een quantummechanische toestand in het algemeen beter niet in termen van deeltjes geïnterpreteerd kan worden en dat alleen voor deeltjes of groepen deeltjes zonder overlap een deeltjesindicestoekenning wel zinvol is, omdat er dan een relatie met de waarneming kan worden gelegd.

In de inleiding hebben we al de 'golf-deeltje dualiteit' in de quantummechanica besproken. Daarna hebben we nog meer problemen rond de term deeltje besproken, die optreden door het beschouwen van meerdeeltjessuystemen, waaronder de correlatieproblemen. We kunnen concluderen dat er nooit deeltjes, zoals klassieke deeltjes, kunnen bestaan in de quantummechanica (en dus in de natuur?!).

Er is theoretisch geen enkele noodzaak deeltjes in de theorie van de quantummechanica te introduceren. Een quantummechanische toestand is een theoretisch begrip waarmee voorspellingen gedaan kunnen worden over meetuitkomsten. De toevoeging van een deeltjesindicestoekenning aan een quantummechanische toestand is theoretisch in het geheel niet noodzakelijk. Om redenen die al uitgebreid aan de orde zijn geweest, hebben we in deze scriptie gesteld dat het wel zinvol is deeltjes te definiëren als er geen overlap is.

In het verlengde hiervan zijn er hierboven ook q-deeltjes gedefiniëerd die wel overlap hebben. De problemen aan deze deeltjes illustreren het feit dat deeltjes in de quantummechanica niet bestaan. Of men wel of niet met deze problematische q-deeltjes wil werken staat een ieder vrij.

De beoefenaars van de quantummechanica die wel met q-deeltjes werken moeten zich goed realiseren dat deze in het algemeen niets te maken hebben met klassieke deeltjes, en goed op de hoogte zijn van de hierboven besproken problemen. In de literatuur gebeurt dit ook. Daarin wordt dan bijvoorbeeld gesproken over bosonen die elkaar aantrekken en fermionen die elkaar afstoten.

5.7 De benadering van q-deeltjes naar klassieke deeltjes

We hebben in 2.2.4 opgemerkt dat er in werkelijkhid altijd enige, zij het vaak voor de toepassingen verwaarloosbare, overlap is. Is het dan niet zo dat we nooit individuele deeltjes of groepen deeltjes kunnen beschouwen in de quantummechanica? Nee, we kunnen namelijk stellen dat als de overlap zeer gering is of verwaarloosbaar, dat dan ook de problemen die zich voordoen ten gevolge van deze overlap bij deze deeltjesindices-toekenning zeer gering of verwaarloosbaar zijn.

In de beoefening van de quantummechanica wordt altijd als er een systeem beschouwd wordt dat afgescheiden is van zijn omgeving, in benadering aangenomen dat er geen overlap is. In diezelfde benadering zijn de deeltjes uit het systeem nu in een toestand zodanig dat de deeltjes binnen het systeem individualiseerbaar zijn en geen correlaties vertonen ten opzichte van de deeltjes buiten het systeem.

Het q-deeltje nadert dus, wat individualiseerbaarheid betreft, naar het klassieke deeltje, als de werkelijke overlap van het q-deeltje zeer gering is en het q-deeltje dus nadert naar een q-deeltje zonder overlap. We kunnen stellen dat in die gevallen waarin de resultaten van de quantummechanica naderen naar de resultaten van de klassieke mechanica, de q-deeltjes ook naderen naar klassieke deeltjes. We kunnen dit het 'correspondentieprincipe van de term deeltje' noemen. Dit correspondentieprincipe geldt alleen als deeltje gedefinëerd zijn als q-deeltjes.

Mijns inziens is het voldoen aan deze eis, dat deeltjes kunnen naderen naar klassieke deeltjes, een noodzakelijke voorwaarde voor een deeltjesconcept in de quantummechanica. Als je er vanuit gaat dat 'deeltjes' 'in werkelijkheid' niet bestaan en de enige reden voor het gebruik van deze term in de quantummechanica de relatie met de klassieke deeltjes is, zoals ik in deze scriptie al herhaaldelijk heb betoogd, dan is dit eenvoudig in te zien.

Het feit dat q-deeltjes alleen in de benadering naar de klassieke mechanica onproblematisch gedefiniëerd zijn in de quantummechanica, toont mijns inziens duidelijk aan dat een deeltje eigenlijk iets is wat in de klassieke mechanica en de bijbehorende klassieke werkelijkheid hoort. Omdat echter de werkelijkheid door ons (nog) vrijwel geheel als een 'klassieke werkelijkheid' wordt ervaren, en onze manier om waarnemingen te interpreteren hieraan geheel verbonden is, is een deeltjesconcept dat hierbij aansluit mijns inziens (nog) onmisbaar.

6 Het opsplitsen van een systeem in deelsystemen

6.1 inleiding

We hebben in 5.1 en 5.2 verschillende deeltjesindices-toekenningen besproken. We kunnen het toekennen van deeltjes-indices aan de toestand van een systeem opvatten als het opsplitsen van het systeem in deelsystemen die allemaal uit één deeltje bestaan. We kunnen 5.1 en 5.2 nu generaliseren zodat het ook geldt voor het opsplitsen van een systeem in deelsystemen die uit meer dan één deeltje bestaan. In feite is deze generalisering al meegenomen in hoofdstuk 5, omdat daarin naast niet overlappende deeltjes ook niet overlappende groepen deeltjes zijn beschouwd.

We kunnen nu eigenlijk direkt al inzien dat het definiëren van de toestand van een deelsysteem in de quantummechanica door het partiële spoor te nemen naar een subhilbertruimte van het systeem, verworpen moet worden, net zoals we in 5.2 het definiëren van de toestand van een deeltje door het partiële spoor te nemen naar een 1-deeltjeshilbertruimte verworpen hebben. Dit zal in dit hoofdstuk uitgebreid aangetoond en uitgediept worden, natuurlijk weer aan de hand van het klassieke analogon.

We zullen in dit hoofdstuk een eenduidige manier van het opsplitsen van een systeem in deelsystemen, die niet met elkaar overlappen, definiëren. We doen dit door de toestand van een deelsysteem te definiëren als een zuivere toestand, die is opgebouwd uit een deelverzameling van 1-deeltjestoestanden, waaruit de toestand van het hele systeem is opgebouwd. Dit heeft consequenties voor de status van eigenlijke en oneigenlijke mengsels die in [2] onderscheiden worden. Dit wordt besproken in 6.4.

6.2 het opsplitsen van een klassiek systeem in deelsystemen

We kunnen de uiteenzetting in 5.1 over het kiezen van een deeltjesindicestoekenning generaliseren, zodat het ook geldt voor het opsplitsen van een systeem in deelsystemen, die uit meer dan één deeltje bestaan.

We hebben gezien dat er een individualisatieprobleem ontstaat in de gemodificeerde klassieke mechanica, wanneer als deeltjesindices coördinaatas-indices genomen worden. Als we analoog hieraan een systeem opsplitsen in deelsystemen door de verzameling van alle coördinaatas-indices te verdelen in deelverzamelingen, waarin de deelsystemen beschreven worden, dan ontstaat er een analoog probleem. Elk deelsysteem komt dan in een klassiek gemengde toestand en alle 1-deeltjestoestanden zijn in de toestand van elk deelsysteem in gelijke mate aanwezig.

Net als bij onze keuze van een deeltjesindicestoekenning in de gemodificeerde klassieke mechanica, zullen we daarom ook voor het opsplitsen van systemen in deelsystemen niet kiezen voor coördinaatas-indices als uitgangspunt voor de opsplitsing, maar de verschillende toestanden waaruit de toestand van het systeem is opgebouwd. Aan de hand van het voorbeeld hieronder zal dit worden toegelicht.

Beschouw een 5-deeltjessysteem S_k dat bestaat uit vijf knikkers. In de gewone klassieke mechanica kan de toestand van S_k genoteerd worden als het punt (a,b,c,d,e) in de faseruimte. In de gemodificeerde klassieke mechanica kan deze toestand genoteerd worden als

{ (a,b,c,d,e),(a,b,c,e,d),(a,b,e,d,c),.....} =

{{ (a,b,c,d,e) }}

We kunnen ons als systeem S_k bijvoorbeeld een systeem voorstellen dat bestaat uit drie knikkers, die met veren aan elkaar en aan een ophangpunt zijn verbonden, en twee knikkers, die zich in een wagentje bevinden dat van een helling afrolt.
We zouden nu graag S_k opsplitsen in twee deelsystemen S_k' en S_k'', waarbij S_k' een 3-deeltjessysteem is en S_k'' een 2-deeltjessysteem. In ons voorbeeld is S_k' het deelsysteem dat uit de drie knikkers aan veren bestaat en S_k'' het deelsysteem dat uit de andere twee knikkers bestaat.

Als we uitgaan van de niet-symmetrische toestand van S_k dan kan S_k in de twee deelsystemen worden opgesplitst, door de vijf coördinaatas-indices op te splitsen in drie coördinaatas-indices voor S_k' en twee coördinaatas-indices voor S_k''. De toestand van S_k' is dan (a,b,c) en de toestand van S_k'' is (d,e). We zien hieruit dat S_k' en S_k'' in een klassiek zuivere toestand zitten en in het voorbeeld hebben we de gewenste twee deelsystemen verkregen.

Als we echter uitgaan van de symmetrische toestand van S_k en S_k op dezelfde manier opsplitsen, dan is de toestand van S_k' de verzameling van de toestanden:

{{ (a,b,c) }} , {{ (a,b,d) }} , {{ (a,b,e) }} , {{ (a,c,d) }} ,

{{ (a,c,e) }} , {{ (a,d,e) }} , {{ (b,c,d) }} , {{ (b,c,e) }} ,

{{ (b,d,e) }} en {{ (c,d,e) }}. (6.1)

en de toestand van S_k'' is de verzameling van de toestanden:

{{ (a,b) }} , {{ (a,c) }} , {{ (a,d) }} , {{ (a,e) }} ,

{{ (b,c) }} , {{ (b,d) }} , {{ (b,e) }} , {{ (c,d) }} ,

{{ (c,e) }} en {{ (d,e) }}. (6.2)

We zien dat we hiermee twee deelsystemen verkrijgen, die in een klassiek gemengde toestand zitten. We kunnen op deze manier nooit de twee gewenste deelsystemen verkrijgen, waarbij de ene bestaat uit de drie knikkers aan veren en de andere uit de twee knikkers in het wagentje.

Het is duidelijk dat deze manier van opsplitsen van een systeem in deelsystemen in de gemodificeerde klassieke mechanica niet onze voorkeur heeft, net zo als het niet onze voorkeur heeft om deeltjesindices te identificeren met coördinaatas-indices in de gemodificeerde klassieke mechanica.

De enige manier om in het voorbeeld S_k op te splitsen in de gewenste S_k' en S_k'' in de gemodificeerde klassieke mechanica, is door de toestanden a, b en c af te splitsen van de toestanden d en e en te stellen dat S_k' in de klassiek zuivere toestand {{ (a,b,c) }} zit en S_k'' in de klassiek zuivere toestand {{ (d,e) }}. Op deze manier is het opsplitsen van systemen in deelsystemen hetzelfde als in de gewone klassieke mechanica.

Het bovenstaande voorbeeld kan natuurlijk op dezelfde manier uitgewerkt worden voor het opsplitsen van een willekeurig ander klassiek systeem in deelsystemen.

In het algemeen kunnen we dus het opsplitsen van een systeem in deelsystemen in de gemodificeerde klassieke mechanica definiëren als het opsplitsen van de verzameling van toestand-indices in deelverzamelingen.

Als nu de twee deelsystemen geen interactie hebben met elkaar, zoals in het voorbeeld van de 5 knikkers, dan kan de Hamiltoniaan, H_k, van S_k als de som van twee termen geschreven worden in een niet-geheel symmetrische vorm. Dit is besproken in Appendix B. Er geldt dan $H_k = H_k' + H_k''$, zodanig dat de twee deelsystemen S_k' en S_k'' als afzonderlijke systemen beschouwd kunnen worden met als Hamiltoniaan H_k' resp. H_k''.

Omdat de toestand van een beschouwd systeem in de niet statistische klassieke mechanica een klassiek zuivere toestand is en de deelsystemen zich ook altijd in een klassiek zuivere toestand bevinden, kunnen we opmerken dat in het algemeen de toestand van een systeem in de niet statistische klassieke mechanica altijd een klassiek zuivere toestand is.

6.3 Het opsplitsen van een quantummechanisch systeem in deelsystemen

De gehele paragraaf 6.2 geldt weer analoog in de quantummechanica. Hieronder zal ik precies dezelfde lijn volgen als in 6.2 met zoveel mogelijk dezelfde zinnen.

We kunnen de uiteenzetting in 5.2 over het kiezen van een deeltjesindicestoekenning generaliseren, zodat het ook geldt voor het opsplitsen van een systeem in deelsystemen, die uit meer dan één deeltje bestaan.

We hebben gezien dat er een individualisatieprobleem ontstaat in de quantummechanica, wanneer als deeltjesindices van een gesymmetriseerde toestand 1-deeltjeshilbertruimte-indices genomen worden. Als we analoog hieraan een systeem opsplitsen in deelsystemen door de verzameling van alle 1-deeltjeshilbertruimte-indices te verdelen in deelverzamelingen, waarin de deelsystemen beschreven worden, dan ontstaat er een analoog probleem. Elk deelsysteem komt dan in een gemengde toestand en alle 1-deeltjestoestanden zijn in de toestand van elk deelsysteem in gelijke mate aanwezig. De toestand van een deelsysteem wordt dan immers verkregen door het partiële spoor te nemen naar een subhilbertruimte.

Net als bij onze keuze van een deeltjesindicestoekenning op gesymmetriseerde toestanden, zullen we daarom ook voor het opsplitsen van systemen in deelsystemen niet kiezen voor het nemen van het partiële spoor, maar de verschillende toestanden waaruit de toestand van het systeem is opgebouwd als uitgangspunt nemen. Aan de hand van het voorbeeld hieronder zal dit worden toegelicht.

Beschouw een 5-deeltjessysteem S in een toestand die is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$, $|\varphi_3\rangle$, $|\varphi_4\rangle$, $|\varphi_5\rangle$. De toestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$ overlappen niet met de toestanden $|\varphi_4\rangle$ en $|\varphi_5\rangle$. We kunnen de toestand van S nu schrijven in de geheel gesymmetriseerde vorm als $|\psi_s\rangle$ en in de niet geheel gesymmetriseerde vorm als $|\psi_{NS}\rangle$ met

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{P} t^{P} \; |\varphi_{P1}\rangle \; \ldots\ldots \; |\varphi_{P5}\rangle .$$

en

$$|\psi_{NS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{K'}} \sum_{R,T} t^{R+T} \; |\varphi_{R1}\rangle|\varphi_{R2}\rangle|\varphi_{R3}\rangle|\varphi_{T4}\rangle|\varphi_{T5}\rangle$$

waarbij $\sqrt{K}$ en $\sqrt{K'}$ normeringsconstanten zijn en t=1 voor bosonen en t=-1 voor fermionen.

$\sum_P$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties, P, van alle 1-deeltjestoestanden en P in de exponent bepaalt het teken van de permutatie.

$\sum_R$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties, R, van de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$

en

$\sum_T$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties, T, van de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_4\rangle$, en $|\varphi_5\rangle$, zodat

$$\sum_T t^T \; |\varphi_{T4}\rangle|\varphi_{T5}\rangle = |\varphi_4\rangle|\varphi_5\rangle + t\;|\varphi_5\rangle|\varphi_4\rangle$$

We kunnen ons als systeem S bijvoorbeeld een systeem voorstellen dat bestaat uit vijf protonen, zodanig dat $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$ gelocaliseerd zijn in Utrecht en $|\varphi_4\rangle$ en $|\varphi_5\rangle$ op de maan.

We zouden nu graag S opsplitsen in twee deelsystemen S′ en S″, die elkaar niet overlappen, waarbij S′ een 3-deeltjessysteem is en S″ een 2-deeltjessysteem. In ons voorbeeld is S′ een deelsysteem in Utrecht en S″ een deelsysteem op de maan.

Als we uitgaan van de niet geheel gesymmetriseerde toestand $|\psi_{NS}\rangle$, dan kan S in twee deelsystemen worden opgesplitst, door de vijf 1-deeltjeshilbertruimte-indices op te splitsen in drie 1-deeltjeshilbertruimte-indices voor S′ en twee 1-deeltjeshilbertruimte-indices voor S″. De toestand van S′ is dan $Tr_{II}(W_{NS})$ en de toestand van S″ is dan $Tr_I(W_{NS})$ met

$$W_{NS} = |\psi_{NS}\rangle\langle\psi_{NS}| \qquad \text{en}$$

$$Tr_{II}(W_{NS}) = \sum_{\substack{n_4\\n_5}} \langle n_4|\langle n_5|\, W_{NS}\,|n_4\rangle|n_5\rangle$$

waarbij $\sum_{n_i}$ is de som of integraal over alle basisvectoren van de 1-deeltjeshilbertruimten met index i.

Dit uitwerken levert:

$$\mathrm{Tr}_{II}(W_{NS}) = \frac{1}{K'_{II}} \sum_{R,S} t^{R+S} |\varphi_{R_1}\rangle|\varphi_{R_2}\rangle|\varphi_{R_3}\rangle\langle\varphi_{S_1}|\langle\varphi_{S_2}|\langle\varphi_{S_3}| \tag{6.3}$$

waarbij $\sum_S$ net als $\sum_R$ betekent dat gesommeeerd wordt over alle permutaties S resp. R van de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$, en K'_{II} een constante is.

Op dezelfde manier geldt:

$$\mathrm{Tr}_{I}(W_{NS}) = \frac{1}{K'_{I}} \sum_{T,V} t^{T+V} |\varphi_{T_4}\rangle|\varphi_{T_5}\rangle\langle\varphi_{V_4}|\langle\varphi_{V_5}| \tag{6.4}$$

waarbij $\sum_V$ net als $\sum_T$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties V resp. T van de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_4\rangle$ en $|\varphi_5\rangle$ en K'_I een constante is.

De toestand van S', die gegeven is door (6.3), is een zuivere toestand, die we kunnen schrijven als:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{K'_{II}}} \sum_R t^R |\varphi_{R_1}\rangle|\varphi_{R_2}\rangle|\varphi_{K_3}\rangle \tag{6.5}$$

De toestand van S", die gegeven is door (6.4) is ook een zuivere toestand. Deze is:

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{K'_{I}}} \sum_T t^T |\varphi_{T_4}\rangle|\varphi_{T_5}\rangle \tag{6.6}$$

We zien dat S' niet overlapt met S". We hebben op deze manier het gewenste resultaat bereikt. Ook in het voorbeeld verkrijgen we op deze manier het deelsysteem in Utrecht en het deelsysteem op de maan.

Als we echter uitgaan van $|\psi_S\rangle$ en S op dezelfde manier opsplitsen, dan zijn de toestanden van de twee deelsystemen $\mathrm{Tr}_{II}(W_S)$ en $\mathrm{Tr}_I(W_S)$, waarbij:

$$W_S = |\psi_S\rangle\langle\psi_S| \qquad \text{en}$$

$$\mathrm{Tr}_{II}(W_S) = \frac{1}{K} \sum_{\substack{i=1..5\\ j=1..5\\ k=1..5\\ i\neq j\neq k}} |\varphi_i\rangle|\varphi_j\rangle|\varphi_k\rangle\langle\varphi_i|\langle\varphi_j|\langle\varphi_k| \tag{6.7}$$

en

$$\mathrm{Tr}_{I}(W_S) = \frac{1}{K} \sum_{\substack{i=1..5\\ j=1..5\\ i\neq j}} |\varphi_i\rangle|\varphi_j\rangle\langle\varphi_i|\langle\varphi_j| \tag{6.8}$$

Merk op dat (6.7) en (6.8) gemengde toestanden zijn. We zien dus dat we hiermee twee deelsystemen verkrijgen, die in een gemengde toestand zitten en die we niet kunen interpreteren als twee deelsystemen die elkaar niet overlappen. We kunnen met deze manier van opsplitsen dus nooit twee niet overlappende deelsystemen verkrijgen. In het voorbeeld kunnen we dus nooit een deelsysteem localiseren in Utrecht en het andere op de maan.

Het is duidelijk dat deze manier van opsplitsen van een systeem in deelsystemen niet onze voorkeur heeft, net zoals het niet onze voorkeur heeft om deeltjesindices te identificeren met 1-deeltjeshilbertruimte-indices. We zullen de deelsystemen, die op deze manier verkregen worden , namelijk door het partiële spoor te nemen naar een subhilbertruimte, h-deelsystemen noemen.

De enige manier om S op te splitsen in de gewenste S′ en S″, uitgaande van de volledig gesymmetriseerde toestand $|\psi_S\rangle$ van S, is door de toestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$ af te splitsen van de toestanden $|\varphi_4\rangle$ en $|\varphi_5\rangle$ en te stellen dat S′ en S″ in een zuivere toestand zitten. De toestand van de op deze manier verkregen deelsystemen is hetzelfde als de toestand van de deelsystemen die we verkregen toen we uitgingen van de niet geheel gesymmetriseerde toestand $|\psi_{NS}\rangle$. In beide gevallen is de toestand van S′ gegeven door (6.5) en de toestand van S″ door (6.6).

Het bovenstaande voorbeeld van een 5-deeltjessysteem kan natuurlijk op dezelfde manier uitgewerkt worden voor het opsplitsen van een willekeurig ander systeem in deelsystemen.
In het algemeen kunnen we dus het opsplitsen van een systeem in deelsystemen in de quantummechanica definiëren als het opsplitsen van de verzameling van toestand-indices in deelverzamelingen. We zullen de deelsystemen, die op deze manier verkregen worden, q-deelsystemen noemen.

We moeten hierbij opmerken dat de analogie in het opsplitsen van systemen in deelsystemen in de klassieke mechanica en de quantummechanica, zoals beschreven in deze en in de vorige paragraaf, alleen geldt voor quantummechanische systemen die opgesplitst worden in deelsystemen die niet met elkaar overlappen. Dit is weer een generalisering van de niet overlappende deeltjes uit 5.2, die wat betreft hun individualiseerbaarheid bij verschillende deeltjesindicestoekenningen een analogie vertonen met klassieke deeltjes.

Als met de niet geheel gesymmetriseerde toestand van het systeem gewerkt wordt, dan kan een niet overlappend deelsysteem uit een systeem, zowel door het afsplitsen van 1-deeltjes-hilbertruimte-indices als door het afsplitsen van toestand-indices verkregen worden, net als in dit geval zowel de deeltjesindicestoekenning met 1-deeltjeshilbertruimte-indices als met toestand-indices genomen kan worden.

Als nu de twee deelsystemen niet overlappen en ook geen interactie hebben met elkaar, zoals in het voorbeeld van de 5 protonen op de maan en in Utrecht, dan kan de Hamiltoniaan, H, van S weer als de som van twee termen geschreven worden in een niet-geheel symmetrische vorm. Er geldt dan H = H′ + H″, zodanig dat de twee deelsystemen S′ en S″ als afzonderlijke systemen beschouwd kunnen worden met als Hamiltoniaan H′ resp. H″.
Dit is een heel belangrijke eigenschap van deze manier van opsplitsen van systemen in deelsystemen. We komen hierop terug in het laatste hoofdstuk.

Twee deelsystemen die niet overlappen maar wel een interactie hebben met elkaar, hebben een klassiek analogon in de klassieke deelsystemen, die wel een interactie hebben met elkaar. De twee deelsystemen kunnen dan in beide theorieën niet als twee afzonderlijke systemen beschouwd worden, omdat de Hamiltoniaan wegens de interactietermen niet in twee relevante termen kan worden opgesplitst. Van een dergelijk deelsysteem in de quantummechanica kunnen we niet zeggen dat de evolutie unitair is.

We kunnen de deeltjesindicestoekenning met toestand-indices als deeltjesindices wel toepassen op 1-deeltjestoestanden die wel overlappen, maar deze is niet eenduidig en er zijn onverklaarbare correlaties tussen de deeltjes. Dit hebben we in 5.6 besproken. Analoog hieraan kunnen we systemen wel opsplitsen in deelsystemen door alle toestand-indices op te splitsen zodanig dat er deelsystemen ontstaan die elkaar wel overlappen. Ook deze opsplitsing is niet uniek voor fermionen en er zijn correlaties tussen de deelsystemen, die niet verklaard kunnen worden uit de vorm van de Hamiltoniaan. Overigens is in dat geval de toestand van het systeem niet alleen opgebouwd uit de toestanden van de deelsystemen. We zullen dit laten zien aan de hand van een 3-deeltjessysteem, S_3, in de toestand

$$|\psi_{3s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{K_{3s}}} \{ |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle|\varphi_3\rangle + |\varphi_2\rangle|\varphi_3\rangle|\varphi_1\rangle + |\varphi_3\rangle|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle$$

$$\pm |\varphi_3\rangle|\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle|\varphi_3\rangle \pm |\varphi_1\rangle|\varphi_3\rangle|\varphi_2\rangle \} \qquad (6.9)$$

waarbij K_{3S} een normeringsconstante is en het plusteken geldt voor bosonen en het minteken voor fermionen. Alleen voor fermionen kan (6.9) in een andere notatie geschreven worden, zodanig dat $|\psi_{3S}\rangle$ een gesymmetriseerde produkttoestand is en is opgebouwd uit andere 1-deeltjestoestanden dan $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$. We schrijven (6.9) voor fermionen in een andere notatie door $|\varphi_1\rangle$ te vervangen door $|\varphi_1+\varphi_3\rangle$. Dat wordt:

$$|\psi_{3s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{K_{3s}}} \{ |\varphi_1+\varphi_3\rangle|\varphi_2\rangle|\varphi_3\rangle + |\varphi_2\rangle|\varphi_3\rangle|\varphi_1+\varphi_3\rangle + \cdots$$
$$\pm |\varphi_3\rangle|\varphi_2\rangle|\varphi_1+\varphi_3\rangle \pm \cdots \} \qquad (6.10)$$

We kunnen nu uit (6.9) de twee deelsystemen S_3' en S_3'' opsplitsen in de toestanden:

$$|\psi_3'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle \right) \qquad (6.11)$$

$$|\psi_3''\rangle = |\varphi_3\rangle \qquad (6.12)$$

Voor fermionen kunnen we zo uit (6.10) de twee deelsystemen S_3''' en S_3'''' opsplitsen in de toestanden:

$$|\psi_3'''\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\varphi_1+\varphi_3\rangle|\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle|\varphi_1+\varphi_3\rangle$$

$$|\psi_3''''\rangle = |\varphi_3\rangle$$

Hieruit zien we dat in het algemeen de opsplitsing van deelsystemen uit S_3 niet uniek is voor fermionen. Ook zien we dat de toestand van S_3, (6.9), niet is opgebouwd uit de toestanden van S_3', (6.11), en S_3'', (6.12). Er geldt immers in het algemeen niet dat de toestand;

$$\frac{1}{K}\left(|\psi_3'\rangle|\psi_3''\rangle \pm |\psi_3''\rangle|\psi_3'\rangle\right) \qquad (6.13)$$

de toestand van het systeem is.

Overigens zijn er correlaties tussen beide deelsystemen, wegens de overlap, zodat bijvoorbeeld een meting op het ene deelsysteem de toestand van het andere deelsysteem verandert.

De opsplitsing van een systeem in deelsystemen is in het geval dat de deelsystemen niet overlappen wel uniek. Dit zullen we aantonen aan de hand van hetzelfde systeem S_3, in de toestand (6.9), waarbij we nu stellen dat $|\varphi_3\rangle$ niet overlapt met $|\varphi_1\rangle$ en $|\varphi_2\rangle$, en dat $|\varphi_1\rangle$ en $|\varphi_2\rangle$ onderling wel overlappen. Er geldt dus:

er is een $N \in \mathbb{Z}$ waarvoor $\langle\varphi_1|x^N|\varphi_2\rangle \neq 0$ (6.14)

en er geldt:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_1|x^N|\varphi_3\rangle &= 0 \quad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z}\\ \langle\varphi_2|x^N|\varphi_3\rangle &= 0 \quad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z}\end{aligned} \qquad (6.15)$$

Wegens (6.15) kan de toestand van het systeem ook in de niet geheel gesymmetriseerde vorm geschreven worden. Deze is:

$$|\psi_{3NS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{K_{3NS}}}\Big\{\left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle\right) \otimes |\varphi_3\rangle \pm |\varphi_3\rangle \otimes \left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle\right)\Big\} \qquad (6.16)$$

We stellen nu de eis dat elke notatie van (6.9) zodanig moet zijn dat de toestand van S_3 een gesymmetriseerde produkttoestand is, die opgebouwd is uit 1-deeltjestoestanden, waarvan er één niet overlapt met de andere twee. In elke notatie van (6.9), die hieraan voldoet, kan S_3 opgesplitst worden in S_3' en S_3'' in de toestanden (6.11) en (6.12), waarbij de notatie van (6.11) niet uniek is voor fermionen, wegens (6.14). We kunnen dit aantonen, door te laten zien dat elke notatie van (6.9), die niet opgesplitst kan worden in S_3' en S_3'' niet voldoet aan de gestelde eis.

Elke andere notatie van (6.9) waaruit S_3' en S_3'' niet kunnen worden opgesplitst bevat minstens één 1-deeltjestoestand die een superpositie is van $|\varphi_3\rangle$ met $|\varphi_1\rangle$ of $|\varphi_2\rangle$. We noemen deze $|\varphi_1'\rangle$ De andere twee 1-deeltjestoestanden zijn willekeurige superposities van $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ en $|\varphi_3\rangle$, waarbij het wel zo moet zijn dat elke $|\varphi_i\rangle$ minstens één keer voorkomt in één van de 1-deeltjestoestanden. We noemen deze twee andere 1-deeltjestoetanden $|\varphi_2'\rangle$ en $|\varphi_3'\rangle$. Hiermee is te bewijzen, dat $|\varphi_1'\rangle$ altijd overlapt met zowel $|\varphi_2'\rangle$ als $|\varphi_3'\rangle$. Ik zal het algemene bewijs hiervan hier niet geven, maar hieronder alleen laten zien dat het geldt voor de notatie (6.10) waarbij (6.14) en (6.15) gelden.

We zullen aantonen dat $|\varphi_{1+}\varphi_3\rangle$ overlapt met $|\varphi_2\rangle$ door te stellen dat ze niet met elkaar overlappen en zo tot een tegenspraak te komen. Stel $|\varphi_{1+}\varphi_3\rangle$ overlapt niet met $|\varphi_2\rangle$, dan geldt:

$$\langle\varphi_{1+}\varphi_3|x^N|\varphi_2\rangle = 0 \qquad \forall\ N \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \text{met (6.15)}$$

$$\langle\varphi_1|x^N|\varphi_2\rangle = 0 \qquad \forall\ N \in \mathbb{Z}$$

maar dit is in tegenspraak met (6.14).

Op dezelfde manier tonen we aan dat $|\varphi_{1+}\varphi_3\rangle$ overlapt met $|\varphi_3\rangle$. Stel $|\varphi_{1+}\varphi_3\rangle$ overlapt niet met $|\varphi_3\rangle$, dan geldt:

$$\langle\varphi_{1+}\varphi_3|x^N|\varphi_3\rangle = 0 \qquad \forall\ N \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \text{met (6.15)}$$

$$\langle\varphi_3|x^N|\varphi_3\rangle = 0 \qquad \forall\ N \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad |\varphi_3\rangle = 0$$

maar $|\varphi_3\rangle$ is niet nul, dus er is weer een tegenspraak.

Er is dus niet voldaan aan de eis dat deze notatie van (6.9), die een gesymmetriseerde produkttoestand is, opgebouwd is uit 1-deeltjestoestanden, waarvan er één niet overlapt met de andere twee. Dit geldt ook voor elke andere notatie van (6.9), die een gesymmetriseerde produkttoestand is. De notatie van (6.9) is dus uniek onder de gestelde eis.

Met de eis dat de notatie van de toestand van een systeem altijd zodanig is dat er zoveel mogelijk deelsystemen kunnen worden opgesplitst, die niet met elkaar overlappen, is de opsplitsing in niet overlappende deelsystemen uniek. Dit is weliswaar alleen aangetoond voor één notatie van het systeem S_3, maar het is daardoor in te zien dat het in het algemeen geldt.

Er geldt voor toestanden van niet-overlappende deelsystemen ook dat ze de toestand van het gehele systeem kunnen opbouwen, als we de niet geheel gesymmetriseerde toestand van het systeem kiezen. Zo geldt in het voorbeeld met S_3 nu dat (6.13) = (6.16). Uit het klassieke analogon, dat in dit hoofdstuk is besproken, volgt dat er bij het opsplitsen in deelsystemen zonder overlap geen correlaties tussen de deelsystemen zijn, die niet een gevolg zijn van interactietermen in de Hamiltoniaan.

6.4 eigenlijke en oneigenlijke mengsels

In [2] wordt aangetoond dat in het algemeen de toestand van een systeem een gemengde toestand is. Dit is geheel in tegenspraak met wat in deze scriptie is aangenomen, namelijk dat in het algemeen de toestand van een systeem een zuivere toestand is, als er wordt gewerkt in de niet-statistische quantum-mechanica.

Er is al eerder opgemerkt dat in [2] de deeltjesindices-toekenning met behulp van h-deeltjes wordt gebruikt. De toestand van een deeltje is dus gegeven door het partiële spoor naar een 1-deeltjeshilbertruimte. In het verlengde hiervan wordt in [2] ook de toestand van een deelsysteem verkregen door het partiële spoor te nemen naar een subhilbertruimte. In 6.3 hebben we gezien dat dan de toestand van een deelsysteem in het algemeen een gemengde toestand is. Omdat elk systeem, behalve het universum, opgevat kan worden als een deelsysteem van een groter systeem, wordt in [2] geconcludeerd dat in het algemeen de toestand van een systeem een gemengde toestand is. Hierop komen we terug in het laatste hoofdstuk.

Er worden in [2] twee soorten gemengde toestanden onderscheiden, de 'eigenlijke mengsels' en de 'oneigenlijke mengsels'.

Een eigenlijk mengsel kan opgevat worden als een statistische verdeling van quantumtoestanden. Door onwetendheid of door het beschouwen van ensembles wordt de toestand van een systeem gegeven door verschillende zuivere toestanden, ieder met een bepaald gewicht, of door een dichtheidsverdeling over zuivere toestanden. In dat geval wordt gebruik gemaakt van de statistische quantummechanica.

Analoog hieraan wordt door onwetendheid of door het beschouwen van ensembles de toestand van een klassiek systeem gegeven door verschillende klassieke zuivere toestanden ieder met een bepaald gewicht of door een dichtheidsverdeling over klassiek zuivere toestanden. In dat geval wordt gebruik gemaakt van de statistische klassieke mechanica.

Een oneigenlijk mengsel wordt in [2] gedefiniëerd als een mengsel dat niet opgevat kan worden als een statistische verdeling van quantumtoestanden, die het gevolg is van onwetendheid of het beschouwen van ensembles. Een oneigenlijk mengsel is bijvoorbeeld de gemengde toestand van een deelsysteem dat is afgesplitst van een systeem door het partiële spoor te nemen, zoals de toestanden (6.7) of (6.8). Dit oneigenlijke mengsel heeft als analogon in de gemodificeerde klassieke mechanica de toestand van een deelsysteem dat is afgesplitst van een systeem door coördinaatas-indices af te splitsen, zoals de toestanden (6.1) of (6.2). In 6.3 hebben we echter deze manier van opsplitsen, voor het geval dat er identieke deeltjes bij betrokken zijn, verworpen. Daardoor kunnen er geen oneigenlijke mengsels verkregen worden. Met onze definitie van deeltjes en deelsystemen is er geen onderverdeling te maken in de aard van een gemengde toestand, zoals in eigenlijke en oneigenlijke mengsels.

We kunnen stellen dat de manier, waarop gemengde toestanden voorkomen in de quantummechanica, niet specifiek is voor de quantummechanica, maar een klassiek analogon heeft. Met onze definitie van deeltjes en deelsystemen komen gemengde toestanden alleen voor in de statistische quantummechanica en in de statistische klassieke mechanica. Er is geen reden om aan te nemen dat toestanden van een systeem in het algemeen gemengd zijn.

In deze scriptie is al steeds gewerkt met systemen in een zuivere toestand en zijn deelsystemen steeds afgesplitst door toestand-indices af te splitsen, zoals in 6.3 beschreven. Dit is door dit hoofdstuk nu gerechtvaardigd.

7 problemen met het gebruik van h-deeltjes en h-deelsystemen

Dit hoofdstuk is bedoeld om nog extra argumenten aan te dragen voor het verwerpen van h-deeltjes en h-deelsystemen voor wie nog niet overtuigd is van de noodzaak ervan.

In de inleiding en in 2.4 is al besproken hoe in het algemeen, door gebruikers van de deeltjesindices-toekenning, die deeltjesindices gelijk stelt aan 1-deeltjeshilbertruimte-indices, wordt omgegaan met het individualisatieprobleem. We hebben in grote lijn twee verschillende zienswijzen onderscheiden. Aan de ene hebben we deeltjesconcept A of B gerelateerd en aan de andere deeltjesconcept C. Beide hebben we in deze scriptie verworpen.

We zullen nu iets dieper ingaan op mogelijke benaderingen van het individualisatieprobleem, als met h-deeltjes gewerkt wordt. Beschouw de volgende uitspraak:

> ‘Met de deeltjesindices-toekenning die deeltjesindices gelijk stelt aan 1-deeltjeshilbertruimte-indices, kan je wel spreken over ‘dit gedetecteerde deeltje’. Je kan alleen niet zeggen welk van de N deeltjes uit en N-deeltjessysteem is gedetecteerd.’

(6.1)

We kunnen hier als volgt op reageren. Voor h-deeltjes geldt dat alle N identieke deeltjes uit het systeem in dezelfde quantumtoestand zitten. Er kan dus niet een specifiek kenmerk aan één deeltjes toegekend worden, zoals dat het gedetecteerd is, omdat alle deeltjes in alles aan elkaar gelijk zijn.

De uitspraak (6.1) kan gerechtvaardigd worden door op te merken dat na de detectie het gedetecteerde deeltje (met meetapparatuur) in een ander systeem geplaatst is. Daarin is het deeltje dan de enige in zijn soort en heeft dus een unieke 1-deeltjestoestand. Het is duidelijk dat je op deze manier na detectie niet meer kan zeggen welk deeltje uit het N-deeltjessysteem is gedetecteerd. Dit geldt overigens in het algemeen ook voor q-deeltjes, zoals we hebben besproken in 5.6.

We zien dat de uitspraak (6.1) en de rechtvaardiging ervan duidelijk redeneringen bevatten die horen bij deeltjesconcept A of B. Deze hebben we echter verworpen omdat ze niet te rijmen zijn met symmetriseringsvoorschrift C.

Als de uitspraak (6.1) gedaan wordt, waarbij ontkend wordt dat een deeltje, dat aangeduid wordt, buiten het systeem geplaatst is, dan zijn er twee mogelijkheden. Ofwel er wordt gebruik gemaakt van het feit dat niet-overlappende deeltjes niet meegesymmetriseerd hoeven worden, zoals besproken in 2.4. Er is dan echter geen rekening geouden met het feit dat ze wel meegesymmetriseerd mogen worden. Ofwel er is aangenomen dat datgene waarover in de waarneming gesproken wordt, in dit geval het gedetecteerde deeltje, niet overeen hoeft te stemmen met de theoretische deeltjesindices-toekenning. Het gedetecteerde deeltje wordt als zodanig benoemd omdat het is waargenomen. Men kan dit natuurlijk aannemen maar het theoretische deeltje, dat door de deeltjesindices-toekenning is gedefiniëerd, heeft dan niets te maken met de term deeltje, die we gebruiken om onze waarnemingen mee uit te drukken. Dit lijkt mij zeer ongewenst voor een theoretische term die we 'deeltje' noemen. In 5.4 hebben we betoogd dat de term deeltje in de quantummechanica zoveel mogelijk moet aansluiten bij de term deeltje in de klassieke mechanica, die een direkte relatie heeft met de waarneming.

Een andere benadering van het individualisatieprobleem, waarin met h-deeltjes gewerkt wordt, wordt beschreven door Penrose in [5]. Daarin neemt hij deeltjesconcept A aan (met h-deeltjes) en symmetriseringsvoorschrift C. Dit laatste heeft, zoals we eerder gezien hebben, tot gevolg dat alle deeltjes in het gehele universum niet individualiseerbaar zijn. Hij stelt daarom dan ook dat men, zuiver correct geproken, niet kan verwijzen naar 'dat bepaalde elektron' of 'dit individuele foton'. Om hier onderuit te komen legitimeert hij het gebruik van deze verwijzingen naar individuele elektronen of fotonen door te stellen dat deze 'een benadering zijn van het gehele plaatje. Het is een benadering die vaak opgaat', zoals hij schrijft, 'maar niet in verschillende omstandigheden, zoals bij supergeleiding of het gedrag van een laser', met andere woorden niet in veeldeeltjessystemen.

Er is hier in het geheel niet duidelijk hoe er benaderd kan worden. Het is een discontinue stap van deeltjes die totaal niet individualiseerbaar zijn naar individualiseerbare deeltjes, terwijl de overgang van een systeem met overlap naar een systeem met steeds minder overlap wel continu verloopt.

Dit probleem kan mijns insziens alleen worden opgelost door de h-deeltjes te verwerpen en met q-deeltjes te werken. Met q-deeltjes is de benadering naar individuele deeltjes immers wel continu. Zoals in 5.7 besproken nadert daarmee namelijk het deeltjesconcept bij steeds geringer wordende overlap naar het klassieke deeltjesconcept, waarin alle deeltjes individualiseerbaar zijn.

Een ander probleem met de deeltjesindices-toekenning die h-deeltjes definiëert is het volgende.

Door 'tweede quantisatie' kan het formalisme van de quantummechanica, dat we in deze scriptie gebruiken, herschreven worden. Er ontstaat dan een formalisme dat precies dezelfde theorie genereert, maar geen 1-deeltjeshilbertruimte-indices kent. Toestanden worden genoteerd in bezettingsgetallen-representatie in de Fock-ruimte. In bezettingsgetallen-representatie komen wel verschillende toestanden voor.

Er zijn dus niet expliciet deeltjesindices aan h-deeltjes toe te kennen in quantummechanische toestanden, die zijn genoteerd in bezettingsgetallenrepresentatie. Dit laat nog eens zien dat 1-deeltjeshilbertruimte-indices als deeltjesindices problematisch zijn.

Het bovenstaande heeft ook weer een klassiek analogon. We hebben immers in 4.3 een notatie voor de symmetrische klassieke toestand gedefiniëerd, die geen coördinaatas-indices bevat. Een voorbeeld van een toestand in deze notatie is (4.3).

Tot nu toe hebben we in dit hoofdstuk laten zien dat het gebruik van h-deeltjes zeer problematisch is. Samen met de analogie met de klassieke mechanica, die in deze scriptie duidelijk naar voren is gekomen, toont dit mijns insziens aan dat het onontkoombaar is, dat h-deeltjes verworpen worden.

We zullen nu belangrijke argumenten aanvoeren voor het verwerpen van het opsplitsen van systemen in h-deelsystemen.
Een duidelijk argument hiervoor is al naar voren gekomen door het mislukken van de poging in 6.3 om uit het systeem, S, door het opsplitsen in h-deelsystemen, het systeem in Utrecht en het systeem op de maan te verkrijgen, terwijl S in het algemeen gezien wordt als een samengesteld systeem, dat is samengesteld uit het systeem in Utrecht en het systeem op de maan.
We kunnen door 6.3 inzien dat, door opsplitsen in h-deelsystemen, niet geldt dat elk systeem een deelsysteem is van een groter systeem. Dit is wel een zeer gewenste eigenschap van een deelsysteem, die door (vrijwel) alle beoefenaars van de quantummechanica wordt aangenomen. Merk op dat dit zelfs in [2] aangenomen wordt, zoals opgemerkt in 6.4, wat eigelijk volkomen in tegenspraak is met het gebruik van de h-deeltjes en h-deelsystemen hierin.

Om quantummechanica te bedrijven moet men ergens beginnen. In het algemeen begint men met het beschouwen van een bepaald quantummechanisch systeem. Dit bevindt zich altijd op een bepaalde locatie. In feite wordt dit gewoon geponeerd. Zuiver correct gesproken zou men altijd met het universum moeten beginnen, omdat dit het enige werkelijke systeem is.
Men kan het beschouwen van een ander systeem rechtvaardigen, door op te merken dat het beschouwde systeem een deelsysteem is van het universum, wat in zeer goede benadering voldoet aan de eis dat het geen overlap en ook geen interactie heeft met zijn omgeving, zodat het in zeer goede benadering als een afzonderlijk systeem kan worden beschouwd met een afzonderlijke Hamiltoniaan. Dit kan alleen door opsplitsen in q-deelsystemen. Door het universum op te splitsen in h-deelsystemen kan nooit een deelsysteem verkregen worden dat normaal gesproken als een quantummechanisch systeem beschouwd wordt. Men kan dus niet zeggen dat elk quantummechanisch systeem, behalve het universum, een deelsysteem is van een groter systeem. Dit is erg ongewenst.
De mogelijkheid van het opsplitsen van systemen in q-deelsystemen is in feite noodzakelijk en wordt ook meestal gebruikt in de praktische beoefening van de quantummechanica. Alleen door deze manier van opsplitsen is het mogelijk een quantummechanisch systeem S te beschouwen dat bestaat uit twee quantummechanische systemen S′ en S″, zodanig dat S′ en S″ quantummechanische systemen zijn met eigen locatie zoals gebruikelijk voor een quantummechanisch systeem. Alleen door opsplitsen in q-deelsystemen kunnen S′ en S″ als deelsystemen van S gezien worden.
In feite wordt deze eigenschap in de praktijk altijd aangenomen en toegepast. Het opsplitsen van systemen in h-deelsystemen is niet voor toepassingen geschikt. In de toepassingen wordt dan ook altijd anders afgesplitst.
Het feit dat het opsplitsen van systemen in q-deelsystemen problematisch is toont mijns insziens aan dat, als er wel overlap is, een quantummechanisch systeem niet zonder meer opgesplitst kan worden in onafhankelijke delen.
De opsplitsing van systemen in h-deelsystemen is weliswaar mathematisch onproblematisch en misschien zelfs mathematisch erg mooi, maar het leidt tot geen enkele praktische toepassing en

sluit niet aan bij wat in het algemeen onder een deelsysteem verstaan wordt en ervan gewenst wordt. Dit geldt ook voor het gebruik van h-deeltjes.

Doordat in deze scriptie de direkte relatie aangetoond is tussen het gebruik van h-deeltjes en h-deelsystemen, is door het bovenstaande betoog om h-deelsystemen te verwerpen, ook de argumentatie om h-deeltjes te verwerpen nog eens geweldig versterkt.

Hierbij past nog de vermeldig dat met het verwerpen van h-deeltjes de term 'ononderscheidbaar' overbodig wordt, zoals is opgemerkt in 2.2.2.

Ik moet tot slot wel opmerken dat door van Fraassen in [3] met succes een poging wordt ondernomen het individualisatie-probleem op te lossen op een geheel andere manier dan in deze scriptie. Hij definiëert deeltjes daarin wel als h-deeltjes. Door aan de 1-deeltjestoestanden, die allemaal gelijk zijn voor identieke deeltjes, nog een extra, niet empirisch waarneembare, 'value state' toe te kennen met behulp van de modale interpretatie, slaagt hij erin het individualisatieprobleem voor bijna alle identieke deeltjes op te lossen.

Het is lijkt mij interessant, en een idee voor verder onderzoek, het deeltjesconcept van van Fraassen en dat uit deze scriptie naast elkaar te leggen en te vergelijken. Voor zover ik het kan overzien, lijkt het mij dat het gebruik van h-deeltjes door van Fraassen wel te verdedigen is, maar dat door bovenstaande uiteenzetting over het opsplitsen van systemen in h-deelsystemen er dan toch grote problemen zijn.

Mijns insziens zou met het deeltjesconcept van van Fraassen de toestand van elk meer-deeltjessysteem, dat immers een deelsysteem is van het gehele universum, alle 1-deeltjestoestanden moeten bevatten die horen bij alle identieke deeltjes van de beschouwde soort in het gehele universum. Hiermee is praktisch niet te werken. De in het algemeen door de beoefenaars van de quantummechanica aangenomen toestand van een bepaald systeem, zou van Fraassen dan, denk ik, de 'value state' van het systeem noemen. Dit lijkt mij allemaal, zo niet onmogelijk, dan toch erg onwenselijk of omslachtig.

Appendix A Afleiding van de stelling dat twee niet-overlappende subsystemen uit een meerdeeltjessysteem afzonderlijk behandeld kunnen worden

Beschouw een N-deeltjessysteem S. De toestand van S wordt beschreven in een N-deeltjeshilbertruimte en is opgebouwd uit de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ .....$|\varphi_N\rangle$. De gesymmetriseerde toestand van S kan als volgt geschreven worden:

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_P t^P |\varphi_{P_1}\rangle|\varphi_{P_2}\rangle \cdots |\varphi_{P_N}\rangle \qquad \text{(A.1)}$$

met

$$K = \sum_{P,Q} t^{P+Q} \langle \varphi_{Q_1}|\varphi_{P_1}\rangle \cdots \langle \varphi_{Q_N}|\varphi_{P_N}\rangle \qquad \text{(A.2)}$$

met t=1 voor bosonen en t=-1 voor fermionen.

en $\sum_P$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties P

en $\sum_Q$ betekent dat gesommeerd wordt over alle permutaties Q

P in de exponent stelt het teken van de permutatie voor over de golffuncties $|\varphi_{P_i}\rangle$ i = 1..N
Q in de exponent stelt het teken van de permutatie voor over de golffuncties $|\varphi_{Q_i}\rangle$ i = 1..N

We nemen nu aan dat S bestaat uit de twee deelsystemen, S' en S", die niet met elkaar overlappen. S' is een M-deeltjessysteem en S" een (N-M)-deeltjessyteem. De indicestoekenning van de 1-deeltjesgolffuncties $|\varphi_i\rangle$ is zodanig dat de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \cdots |\varphi_M\rangle$ behoren tot S' en $|\varphi_{M+1}\rangle \cdots |\varphi_N\rangle$ behoren tot S". Er geldt dan, zoals volgt uit de definitie van 'geen overlap' in 2.2.4:

$$\langle \varphi_i | x^N | \varphi_j \rangle = 0 \qquad \text{voor alle } N \in \mathbb{Z} \text{ en } i=1..M \text{ en } j=M+1..N \qquad \text{(A.3)}$$

We beschouwen alleen observabelen die voldoen aan de eis dat ze zijn opgebouwd uit 1-deeltjesoperatoren A_1, die diagonaal zijn in plaats zodat:

$$A_1 = \int dx\, f(x)\, |x\rangle\langle x| = \int dx \sum_N a_N x^N\, |x\rangle\langle x| \qquad \text{(A.4)}$$

er geldt nu: $\langle \varphi_i | A_1 | \varphi_j \rangle \overset{(A.4)}{=} \langle \varphi_i | f(x) | \varphi_j \rangle \overset{(A.4)}{=} \langle \varphi_i | \sum_N a_N x^N | \varphi_j \rangle$

$= \sum_N a_N \langle \varphi_i | x^N | \varphi_j \rangle \overset{(A.3)}{=} 0$ voor alle i=1..M en j=M+1..N (A.5)

We eisen ook dat de observabelen symmetrisch zijn onder verwisseling van de 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Deze eis geeft geen extra beperkingen aan de mogelijke observabelen die beschouwd kunnen worden. In een gesymmetriseerde toestand heeft elke I-deeltjeshilbertruimte immers exact dezelfde eigenschappen. De verwachtingswaarde van een niet-symmetrische observabele verandert dan niet door verwisseling van 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Er kan evengoed met een symmetrische observabele gewerkt worden, die ook dezelfde verwachtingswaarden genereert. Aan het eind van deze Appendix en in Appendix B worden niet-symmetrische observabelen uitgebreider behandeld.

In deze Appendix beschouwen we alleen 1-deeltjesoperatoren, die diagonaal zijn in plaats, van de vorm:

$$A = A^{1..N} = A_1^1 \otimes \mathbb{1}^{2..N} + \mathbb{1}^1 \otimes A_1^2 \otimes \mathbb{1}^{3..N} + \ldots + \mathbb{1}^{1..N-1} \otimes A_1^N$$

De bovenindex van de operatoren is de 1-deeltjeshilbertruimte-index.

Men kan zelf nagaan dat de resultaten van de afleidingen in deze Appendix ook gelden voor operatoren, die diagonaal zijn in plaats, die op meer deeltjes werken. Men moet dan gewoon de afleidingen hieronder toepassen op meerdeeltjes-operatoren. Alle observabelen van een systeem, die diagonaal zijn in plaats, kunnen geschreven worden als een superpositie van bovengenoemde operatoren. Het is eenvoudig na te gaan dat onderstaande afleidingen ook gelden voor deze superposities.

We bepalen nu de verwachtingswaarden van A in de toestand $|\psi_s\rangle$

$$\langle A \rangle_{|\psi_s\rangle} = T_r \left(W_{|\psi_s\rangle} \cdot A \right) =$$

$$\frac{1}{K}\int_{y^1}\cdots\int_{y^N} dy^1 dy^2 \cdots dy^N \sum_{P,Q} t^{P+Q} \langle y^1|\varphi_{P_1}\rangle\langle y^2|\varphi_{P_2}\rangle\cdots\langle y^N|\varphi_{P_N}\rangle \cdot$$

$$\Big(\langle\varphi_{Q_1}|A_1|y^1\rangle\langle\varphi_{Q_2}|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{Q_N}|y^N\rangle +$$

$$\langle\varphi_{Q_1}|y^1\rangle\langle\varphi_{Q_2}|A_1|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{Q_N}|y^N\rangle +$$

$$\vdots \qquad \ddots \qquad +$$

$$\langle\varphi_{Q_1}|y^1\rangle\langle\varphi_{Q_2}|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{Q_N}|A_1|y^N\rangle \Big)$$

(A.6)

met $W_{|\psi_s\rangle} = |\psi_s\rangle\langle\psi_s|$

en de integraal staat voor integreren of sommeren afhankelijk van de separabiliteit van de basis.

Alle N termen uit (A.6) geven dezelfde bijdrage aan $\langle A\rangle_{|\psi_s\rangle}$. Hieronder wordt aangetoond dat de eerste en de tweede term gelijk zijn.

de eerste term van (A.6) is:

$$\frac{1}{K}\int\cdots\int dy^1 \cdots dy^N \sum_{P,Q} t^{P+Q}\langle y^1|\varphi_{P_1}\rangle\cdots\langle y^N|\varphi_{P_N}\rangle\langle\varphi_{Q_1}|A_1|y^1\rangle\cdots\langle\varphi_{Q_N}|y^N\rangle$$

verwissel de indices van de dummy-variabelen y^1 en y^2

permuteer φ_{P_1} en φ_{P_2}. Dit geeft een min-teken voor fermionen
permuteer φ_{Q_1} en φ_{Q_2}. Dit geeft weer een min-teken voor fermionen, zodat de tekenwisseling weer wordt opgeheven.

Daarmee wordt de eerste term van (A.6):

$$\frac{1}{K}\int\cdots\int dy^1 \cdots dy^N \sum_{P,Q} t^{P+Q}\langle y^2|\varphi_{P_2}\rangle\langle y^1|\varphi_{P_1}\rangle\cdots\langle y^N|\varphi_{P_N}\rangle\langle\varphi_{Q_2}|A_1|y^2\rangle\langle\varphi_{Q_1}|y^1\rangle\cdots\langle\varphi_{Q_N}|y^N\rangle$$

en deze term is gelijk aan de tweede term van (A.6)

Op dezelfde manier volgt dat de overige termen gelijk zijn. Hiermee en met closure volgt:

$$\langle A\rangle_{|\psi_3\rangle} = \frac{N}{K}\sum_{P,Q} t^{P+Q}\langle\varphi_{Q_2}|\varphi_{P_2}\rangle\cdots\langle\varphi_{Q_N}|\varphi_{P_N}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{P_1}\rangle\langle\varphi_{Q_1}|A_1|y\rangle \tag{A.7}$$

Omdat $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=0$ voor i = 1..M en j = M+1..N zijn veel termen van de som over de permutaties P en Q nul. Alleen de termen waarbij zowel φ_{Q_i} als φ_{P_i} (i=2..N) ofwel behoren tot $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_M\}$ ofwel behoren tot $\{\varphi_{M+1},\varphi_{M+2},\cdots,\varphi_N\}$ zijn mogelijk ongelijk nul.

We beschouwen nu eerst het geval dat $\varphi_{Q_1}\in\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_M\}$ en $\varphi_{P_1}\in\{\varphi_1,\cdots,\varphi_M\}$

Er zijn nu $\binom{N-1}{M-1}$ verschillende manieren om alle φ_{Q_i} met i = 2..N

te verdelen over de twee verzamelingen $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_M\}\backslash\{\varphi_{P_1}\}$

en $\{\varphi_{M+1},\varphi_{M+2},\cdots,\varphi_N\}$

alle φ_{P_i} moeten dan in dezelfde verzameling als φ_{Q_i} zitten. Daar

is dus precies 1 mogelijkheid voor. Alle $\binom{N-1}{M-1}$ manieren geven dezelfde bijdrage aan (A.7). Deze bijdrage is de eerste term van (A.8) hieronder. Daarin zijn de permutaties vervangen door R,S,T en V, waarbij:

R en S zijn permutaties over $|\varphi_1\rangle\cdots|\varphi_M\rangle$
en T en V zijn permutaties over $|\varphi_{M+1}\rangle\cdots|\varphi_N\rangle$

We moeten nu nog de bijdragen aan (A.7) beschouwen waarvoor:

$\varphi_{Q_1}\in\{\varphi_{M+1},\cdots,\varphi_N\}$ en $\varphi_{P_1}\in\{\varphi_{M+1},\cdots\varphi_N\}$

Dan zijn er $\binom{N-1}{M}$ manieren om alle φ_{Q_i} met i = 2..N

te verdelen over de twee verzamelingen $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_M\}$ en

$\{\varphi_{M+1},\varphi_{M+2},\cdots,\varphi_N\}\backslash\{\varphi_{P_1}\}$. Deze geven weer allemaal dezelfde

bijdrage aan (A.7). Met (A.4) is hieruit te zien dat deze bijdrage de tweede term is uit (A.8).

(A.7) kan dus als volgt geschreven worden:

$$\langle A\rangle_{|\psi_3\rangle} = \frac{N}{K}\binom{N-1}{M-1}\sum_{R,S,T,V} t^{R+S+T+V}\cdot$$

$$\langle\varphi_{S_2}|\varphi_{R_2}\rangle\cdots\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\langle\varphi_{V_{M+1}},\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdots\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{R_1}\rangle\langle\varphi_{S_1}|A_1|y\rangle$$

$$+\frac{N}{K}\binom{N-1}{M}\sum_{R,S,T,V} t^{R+S+T+V} \cdot$$

$$\langle\varphi_{S_1}|\varphi_{R_1}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\langle\varphi_{V_{M+2}}|\varphi_{T_{M+2}}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{V_{M+1}}\rangle\langle\varphi_{T_{M+1}}|A_1|y\rangle$$

(A.8)

met (A.2) en (A.3) geldt:

$$K=\binom{N}{M}\sum_{R,S,T,V} t^{R+S+T+V}\langle\varphi_{S_1}|\varphi_{R_1}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\langle\varphi_{V_{M+1}}|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle$$

(A.9)

uit (A.8) en (A.9) is te zien dat voor de eerste term alle termen uit $\sum_{T,V}$ weggedeeld kunnen worden en voor de tweede term kunnen alle termen uit beide sommaties weggedeeld worden. Daarmee wordt $\langle A\rangle_{|\psi_S\rangle}$ =

$$M\,\frac{\sum_{R,S} t^{R+S}\langle\varphi_{S_2}|\varphi_{R_2}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{R_1}\rangle\langle\varphi_{S_1}|A_1|y\rangle}{\sum_{R,S} t^{R+S}\langle\varphi_{S_1}|\varphi_{R_1}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle}+$$

$$N-M\,\frac{\sum_{T,V} t^{T+V}\langle\varphi_{V_{M+2}}|\varphi_{T_{M+2}}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{V_{M+1}}\rangle\langle\varphi_{T_{M+1}}|A_1|y\rangle}{\sum_{T,V} t^{T+V}\langle\varphi_{V_{M+1}}|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle}$$

(A.10)

Beschouw nu de niet-gesymmetriseerde toestand:

$$|\psi_{NS}\rangle=\frac{1}{\sqrt{K'}}\sum_{R,T} t^{R+T}|\varphi_{R_1}\rangle\cdot\cdot|\varphi_{R_M}\rangle\cdot|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdots|\varphi_{T_N}\rangle$$

(A.11)

en de normeringsconstante K':

$$K'=\sum_{R,S,T,V} t^{R+S+T+V}\langle\varphi_{S_1}|\varphi_{R_1}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\cdot\langle\varphi_{V_{M+1}}|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdot\cdot\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle \quad \text{(A.12)}$$

De toestand van het systeem is nu duidelijk in twee subhilbertruimten verdeeld. De verwachtingswaarde van A in de toestand $|\psi_{NS}\rangle$ is:

$$\langle A\rangle_{|\psi_{NS}\rangle} = T_r\left(W_{|\psi_{NS}\rangle}\cdot A\right) =$$

$$\frac{1}{K'}\sum_{R,S,T,V} t^{R+S+T+V}\int dy^1\cdots dy^N \langle y^1|\varphi_{R_1}\rangle\cdots\langle y^M|\varphi_{R_M}\rangle\langle y^{M+1}|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdots\langle y^N|\varphi_{T_N}\rangle\cdot$$

$$\Big(\langle\varphi_{S_1}|A_1|y^1\rangle\langle\varphi_{S_2}|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{V_N}|y^N\rangle +$$

$$\langle\varphi_{S_1}|y^1\rangle\langle\varphi_{S_2}|A_1|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{V_N}|y^N\rangle +$$

$$\vdots$$

$$\langle\varphi_{S_1}|y^1\rangle\langle\varphi_{S_2}|y^2\rangle\cdots\cdots\cdots\langle\varphi_{V_N}|A_1|y^N\rangle\Big)$$

(A.13)

De eerste M termen zijn weer, net als bij de afleiding van allemaal gelijk en de laatste N-M termen ook. Met K' uit (A.12) en met closure volgt hieruit:

$$\langle A\rangle_{|\psi_{NS}\rangle} =$$

$$M\cdot\frac{\sum_{R,S} t^{R+S}\langle\varphi_{S_2}|\varphi_{R_2}\rangle\cdots\langle\varphi_{S_M}|\varphi_{R_M}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{R_1}\rangle\langle\varphi_{S_1}|A_1|y\rangle}{\sum_{R,S} t^{R+S}\langle\varphi_{S_1}|\varphi_{R_1}\rangle\langle\varphi_{S_2}|\varphi_{R_2}\rangle\cdots\langle\varphi_{S_N}|\varphi_{R_M}\rangle} +$$

$$(N-M)\cdot\frac{\sum_{T,V} t^{T+V}\langle\varphi_{V_{M+2}}|\varphi_{T_{M+2}}\rangle\cdots\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle\cdot\int dy\,\langle y|\varphi_{V_{M+1}}\rangle\langle\varphi_{T_{M+1}}|A_1|y\rangle}{\sum_{T,V} t^{T+V}\langle\varphi_{V_{M+1}}|\varphi_{T_{M+1}}\rangle\cdots\langle\varphi_{V_N}|\varphi_{T_N}\rangle}$$

(A.14)

Daaruit zien we met (A.10):

$$\langle A \rangle_{|\psi_s\rangle} = \langle A \rangle_{|\psi_{NS}\rangle} \tag{A.15}$$

Beschouw nu het geval dat de deelsystemen S′ en S″ systemen zijn. We beschouwen nu alleen operatoren die diagonaal zijn in plaats en werken op S′. Deze zijn opgebouwd uit 1-deeltjesoperatoren B_1, die diagonaal zijn in plaats, waarvoor geldt:

$$B_1 |\varphi_j\rangle = \mathbb{1} |\varphi_j\rangle \qquad j = 1+M..N$$

Omdat het deelsysteem S″ een systeem is, is het voor de empirie niet noodzakelijk, als er alleen observabelen worden beschouwd die op S′ werken, dat S″ in de beschrijving meegenomen wordt. Met andere woorden, S′ kan dan ook afzonderlijk worden beschouwd zonder dat de verwachtingswaarden daardoor veranderen. Dit zal hieronder worden aangetoond. Schrijf daartoe:

$$B = B^{1..N} = B_M^{1..M} \otimes \mathbb{1}^{M+1..N} + \mathbb{1}^{1..M} \otimes B_{N-M}^{M+1..N} \tag{A.16}$$

met $B_M^{1..M} = B_1^1 \otimes \mathbb{1}^{2..M} + \mathbb{1}^1 \otimes B_1^2 \otimes \mathbb{1}^{3..M} + .. + \mathbb{1}^{1..M-1} \otimes B_1^M$

$$B_{N-M}^{M+1..N} = B_1^{M+1} \otimes \mathbb{1}^{M+2..N} + \mathbb{1}^{M+1} \otimes B_1^{M+2} \otimes \mathbb{1}^{M+3..N} + .. + \mathbb{1}^{M+1..N-1} \otimes B_1^N$$

omdat we alleen operatoren beschouwen die slechts op één deeltje werken, hebben alle symmetrische operatoren die op S werken de vorm van B. merk op dat $B^{1..M}$ een operator is die alleen op S′ werkt en ook alleen op S′ gedefiniëerd is.

$|\psi_{NS}\rangle$ uit (A.11) kan geschreven worden als

$$|\psi_{NS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}} \left(\sum_{R} t^R |\varphi_{R_1}\rangle .. |\varphi_{R_M}\rangle \right) \otimes \left(\sum_{T} t^T |\varphi_{T_{M+1}}\rangle .. |\varphi_{T_N}\rangle \right) \tag{A.17}$$

De dichtheidsoperator bij deze toestand is:

$$W_{|\psi_{NS}\rangle} = |\psi_{NS}\rangle\langle\psi_{NS}| = U \otimes V \tag{A.18}$$

waarbij

$$U = \frac{1}{K^U} \sum_{R,S} t^{R+S} |\varphi_{R_1}\rangle \cdot\cdot |\varphi_{R_M}\rangle \langle \varphi_{S_1}| \cdot\cdot \langle \varphi_{S_M}| = |X_U\rangle\langle X_U|$$

(A.19)

$$V = \frac{1}{K^V} \sum_{T,V} t^{T+V} |\varphi_{T_{M+1}}\rangle \cdot\cdot |\varphi_{T_N}\rangle \langle \varphi_{V_{M+1}}| \cdot\cdot \langle \varphi_{V_N}| = |X_V\rangle\langle X_V|$$

(A.20)

$$K^U = \sum_{R,S} t^{R+S} \langle \varphi_{S_1} | \varphi_{R_1}\rangle \cdot\cdot \langle \varphi_{S_M} | \varphi_{R_M}\rangle$$

$$K^V = \sum_{T,V} t^{T+V} \langle \varphi_{V_{M+1}} | \varphi_{T_{M+1}}\rangle \cdot\cdot \langle \varphi_{V_N} | \varphi_{T_N}\rangle$$

$$|X_U\rangle = \frac{1}{\sqrt{K^U}} \cdot \sum_R t^R |\varphi_{R_1}\rangle \cdot\cdot |\varphi_{R_M}\rangle$$

$$|X_V\rangle = \frac{1}{\sqrt{K^V}} \cdot \sum_T t^T |\varphi_{T_{M+1}}\rangle \cdot\cdot |\varphi_{T_N}\rangle$$

$W_{|\psi_{NS}\rangle}$, U en V zijn dichtheidsoperatoren die alle drie zuiver zijn.

Er geldt:

$$\langle B\rangle_{W_{|\psi_S\rangle}} \overset{(A.15)}{=} \langle B\rangle_{W_{|\psi_{NS}\rangle}} \overset{(A.16)}{=} \left\langle B_M^{1..M} \otimes \mathbb{1}^{M+1..N} + \mathbb{1}^{1..M} \otimes B_{N-M}^{M+1..N} \right\rangle_{W_{|\psi_{NS}\rangle}} \overset{(A.18)}{=}$$

$$\left\langle B_M^{1..M} \otimes \mathbb{1}^{M+1..N} + \mathbb{1}^{1..M} \otimes B_{N-M}^{M+1..N} \right\rangle_{U\otimes V} = \left\langle B_M^{1..M}\right\rangle_U \cdot \left\langle \mathbb{1}^{M+1..N}\right\rangle_V +$$

$$\left\langle \mathbb{1}^{1..M}\right\rangle_U \left\langle B_{M-N}^{M+1..N}\right\rangle_V = \left\langle B_1^{1..M}\right\rangle_U \cdot (N-M) + M(N-M)$$

(A.21)

De voorlaatste stap wordt gerechtvaardigd door het feit dat de verwachtingswaarde van een direkt produkt van operatoren die alleen op de afzonderlijke deelsystemen werken, ook als een produkt van twee verwachtingwaarden geschreven kan worden. Dit wordt aangetoond op blz. 34 van [2].

We zien uit (A.21) dat bij de symmetrische operator B, die op S werkt een symmetrische operator $B^{1..M}$ te vinden is, die alleen op S' werkt.

We kunnen ook uitgaan van een niet symmetrische operator die op S gedefiniëerd is maar alleen op S' werkt, van de vorm:

$$B_{NS} = B_M^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N} \qquad \text{(A.22)}$$

dan geldt:

$$\langle B_{NS} \rangle_{W|\Psi_{NS}\rangle} \overset{(A.18)(A.22)}{=} \langle B_M^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N} \rangle_{U \otimes V} = \langle B_M^{1..M} \rangle_U \cdot \langle 1\!\!1^{M+1..N} \rangle_V$$

$$= \langle B_M^{1..M} \rangle_U \cdot (N-M)$$

en dus

$$\langle B_{NS} \rangle_{W|\Psi_{NS}\rangle} \cdot \frac{1}{N-M} = \left\langle \frac{B_M^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N}}{N-M} \right\rangle_{W|\Psi_{NS}\rangle} = \langle B_M^{1..M} \rangle_U$$

(A.23)

Dit komt overeen met (3.2) in de scriptie, met $B_M^{1..M} = B_{S'}$

Opmerking

De eis dat de observabele symmetrisch is was van belang bij de afleiding van (A.14). De toestand $|\Psi_{NS}\rangle$ is immers niet symmetrisch. Door er een symmetrische observabele op los te laten worden toch alle 1-deeltjeshilbertruimten gelijk behandeld. (A.15) geldt niet voor niet-symmetrische observabelen. Bijvoorbeeld voor de niet symmetrische observabele $\langle A^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N} \rangle$ geldt:

$$\langle A^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N} \rangle_{|\Psi_S\rangle} = \frac{M}{N} \langle A^{1..M} \otimes 1\!\!1^{M+1..N} \rangle_{|\Psi_{NS}\rangle}$$

Men kan wel met niet-symmetrische observabelen werken in systemen met geen overlap. Voor het vergelijken van de verwachtingswaarden van deze observabelen in de verschillende toestanden moet men dan goed op de juiste voorfactor letten.

Appendix B   de relatie tussen symmetriseringsvoorschrift en symmetrie in de observabelen

In het volgende zal ik proberen de relatie aan te geven tussen het symmetriseringsvoorschrift en een symmetrie in de hamiltoniaan van het systeem en in de observabelen.

We kunnen stellen dat voor een systeem van identieke deeltjes altijd alle observabelen symmetrisch moeten zijn in de deeltjesindices, om precies dezelfde reden als waarom in een klassiek systeem van identieke deeltjes elke te meten grootheid symmetrisch is in de deeltjesindices. Bijvoorbeeld in een klassiek systeem van twee identieke deeltjes is de onderlinge afstand, $|x1-x2|$, een meetbare grootheid. Deze is symmetrisch in de deeltjesindices.

Overigens geldt natuurlijk dat alle verwachtingswaarden van een meerdeeltjessysteem invariant moeten zijn onder verwisseling van de deeltjesindices.

Als we nu aannemen dat deeltjesindices corresponderen met 1-deeltjeshilbertruimte-indices dan stellen we dus dat elke observabele symmetrisch moet zijn in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices. In dit geval zou, opdat alle verwachtingswaarden invariant zijn onder verwisseling van de deeltjes-indices, de toestand van het systeem niet symmetrisch hoeven zijn. Dit is eenvoudig na te gaan en wordt ook aangetoond door van Fraassen in [3]. Uit de symmetrie van de observabelen is dus niet het symmetriseringsvoorschrift af te leiden.

Het is echter wel zo dat een niet-symmetrische toestand in een systeem dat alleen symmetrische observabelen heeft wel erg onnatuurlijk is. De keuze voor de verschillen in de 1-deeltjeshilbertruimten is dan volkomen willekeurig. Elke verwisseling van 1-deeltjeshilbertruimte-indices in een niet symmetrische toestand levert een andere niet-symmetrische toestand op, die evengoed de toestand van het systeem kan zijn.

Het is dus wel aannemelijk dat in een systeem waarin alle observabelen symmetrisch zijn de toestanden dat ook moeten zijn, maar het is er zeker niet uit afleidbaar.

Aan de andere kant is het zo dat als de toestand symmetrisch of anti-symmetrisch is, dan is het niet noodzakelijk, opdat alle verwachtingswaarden invariant zijn onder verwisseling van de deeltjes-indices, dat de observabelen symmetrisch zijn. Uit het symmetriseringvoorschrift volgt dus niet dat alle observabelen symmetrisch moeten zijn.

Als we aannemen dat er niet-symmetrische observabelen zijn, dan kan het symmetriseringsvoorschrift wel afgeleid worden uit de eis dat alle verwachtingswaarden van observabelen invariant moeten zijn onder verwisseling van 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Dit is wat door Sarry in [6] en Kaplan in [7] is bewezen. Hiermee is echter de stelling (3.3) niet bewezen, wat natuurlijk wel de bedoeling was van Sarry en Kaplan. In dit geval corresponderen deeltjesindices namelijk niet met 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Elke observabele van een systeem van identieke deeltjes moet namelijk symmetrisch zijn in de deeltjesindices zoals we hierboven al hebben opgemerkt. Als er dus observabelen beschouwd worden die niet-symmetrisch zijn in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices, dan kunnen 1-deeltjeshilbertruimte-indices nooit deeltjes-indices zijn. De stelling wordt hiermee dus niet bewezen.

Resumerend kunnen we stellen dat het symmetriseringsvoorschrift niet afgeleid kan worden uit het feit dat het systeem uit identieke deeltjes bestaat. Het is een onafhankelijk postulaat. Uit het symmetriseringsvoorschrift kan ook niet afgeleid worden dat alle observabelen symmetrisch moeten zijn in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices. Al deze observabeleen moeten alleen dan symmetrisch zijn in de 1-deeltjeshilbertruimte-indices als de deeltjesindicestoekenning zo is dat elk deeltje correspondeert met een 1-deeltjeshilbertruimte. Bij een andere deeltjesindicestoekenning is het dus niet noodzakelijk dat alle observabelen symmetrisch zijn.

Het is echter niet zinvol te werken met niet-symmetrische observabelen als de toestand van het systeem wel gesymmetriseerd is. Er zijn dan verschillende uitdrukkingen van observabeleen die precies dezelfde verwachtingswaarden genereren. Beschouw bijvoorbeeld een twee-deeltjessysteem in de toestand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle \right)$$

en drie observabelen

$$A \otimes \mathbb{1}, \qquad \mathbb{1} \otimes A, \qquad \tfrac{1}{2}(A \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes A)$$

De verwachtingswaarde van elke observabele in de toestand $|\psi\rangle$ is gelijk. Het volstaat dus alleen de symmetrische observabele te beschouwen.

Aan de andere kant is het wel zinvol te werken met niet-symmetrische observabelen als de toestand van een meerdeeltjes-systeem ook niet-symmetrisch is en als alleen observabelen beschouwd worden, die op een deel van het systeem werken, namelijk dat deel dat wel gesymmetriseerd is. Dit kan alleen het geval zijn als er geen gehele overlap is. Als bijvoorbeeld de toestand van het bovengenoemde twee-deeltjessysteem niet symmetrisch is zodat

$$|\Phi\rangle = |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle$$

dan is er kennelijk geen overlap tussen de 1-deeltjestoestanden $|\varphi_1\rangle$en $|\varphi_2\rangle$, zodat voor elke 1-deeltjesoperator, C, die een observabele, is geldt dat het matrixelement $\langle\varphi_1|C|\varphi_2\rangle$ nul is. Beschouw bijvoorbeeld de 1-deeltjesoperator B, waarvoor geldt $B|\varphi_2\rangle$ is nul, dan kan deze voor het gehele systeem het beste geschreven worden als $B\otimes\mathbb{1}$.
De symmetrische variant $B\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes B$ genereert natuurlijk precies dezelfde vewachtingswaarden, maar om dezelfde reden als waarom de toestand van het hele systeem niet symmetrisch is hoeft ook de observabele niet symmetrisch te zijn.

Beschouw een systeem S, dat is opgebouwd uit twee deelsystemen, S′ en S″, die zelf ook systemen zijn. S wordt alleen in de niet geheel gesymmetriseerde toestand beschouwd, zodat S′ in een bepaalde hilbertruimte, $\mathcal{H}'$, beschreven wordt en S″ in een andere hilbertruimte, $\mathcal{H}''$. Men kan hierop nu een geheel symmetrische Hamiltoniaan laten werken, maar het is veel handiger en in dit geval mogelijk een Hamiltoniaan te gebruiken van de vorm: $H = H' + H''$, waarbij H′ alleen werkt in $\mathcal{H}'$ en H″ alleen in $\mathcal{H}''$.

Analoog hieraan geldt voor klassieke systemen dat de Hamiltoniaan, die in principe symmetrisch moet zijn in de deeltjesindices die behoren bij identieke deeltjes (zie paragraaf 4.3 van de scriptie), daarin toch in de praktijk niet altijd symmetrisch is. Immers, als er bijvoorbeeld een systeem beschouwd wordt dat bestaat uit twee deelsystemen, waarvan de ene een knikker is die van een hellend vlak rolt en de andere een volkomen identieke knikker die aan een veer slingert, dan is het duidelijk dat in het algemeen de hamiltoniaan zo gedefiniëerd wordt, dat deze niet symmetrisch is in de deeltjesindices. Het is weliswaar theoretisch wel mogelijk een symmetrische hamiltoniaan te definiëren. Deze is echter veel gecompliceerder dan de symmetrische.

Appendix C De empirische equivalentie van de statistische klassieke mechanica met en zonder symmetriseringsvoorschrift

In de afleiding van de Maxwell-Bolzmann-verdeling door Boltzmann in 1877 wordt het volume in de faseruimte bepaald dat ingenomen wordt door alle microtoestanden in de faseruimte die horen bij één macrotoestand. Dit volume wordt ook bepaald in de meeste literatuur waarin de uitdrukking van de entropie wordt afgeleid en de afleidingen van de verdelingsfuncties in verschillende ensembles worden gegeven.

In de uitdrukking voor dit volume zit altijd een factor die het aantal mogelijke deeltjesindices-verwisselingen aangeeft, die leiden tot een andere microtoestand bij dezelfde macrotoestand.

In de toestanden van de gemodificeerde klassieke mechanica kunnen geen deeltjesindices verwisseld worden. Het volume van alle verschillende microtoestanden, die verkregen worden door de deeltjesindicesverwisselingen in de gewone klassieke mechanica, is het volume van één microtoestand in de gemodificeerde klassieke mechanica. Dezelfde vermenigvuldigingsfactor komt zo tevoorschijn.

Het is misschien interessant de hele klassieke statistische mechanica te herzien door symmetrische toestanden in te voeren en de voor- en nadelen hiervan op te merken. Misschien werpt het ook een ander licht op de discussie rond de factor N!, waarmee, zoals onderzoek binnen onze vakgroep heeft uitgewezen, in de literatuur niet altijd correct wordt omgegaan. Ik heb geen tijd meer om me hierin te verdiepen en beperk me tot de opmerking dat het wel aantoonbaar moet zijn dat de klassieke statistische mechanica met en zonder symmetriseringsvoorschrift empirisch equivalent zijn.

Men zou kunnen denken dat er met het symmetriseringsvoorschrift een correlatieprobleem op kan treden, waardoor bijvoorbeld de kans op twee keer kop, bij het gooien met twee guldens, gelijk is aan de kans op een kop en een munt. De kansen zouden dan 1/3 zijn, net zo als in het voorbeeld van het correlatieprobleem in 1.2. Dit is echter niet zo. Er kunnen in de klassieke mechanica niet twee deeltjes in dezelfde toestand zitten. De twee guldens bevinden zich altijd op een verschillende plaats. Ik heb bijvoorbeeld een gulden links en een gulden rechts. De mogelijke uitkomsten van het kansexperiment zijn dan

(Kl,Kr) , (Kl,Mr) , (Ml,Kr) , (Ml,Mr)

de kansen zijn hiermee gelijk aan die in de gewone klassieke statische mechanica.

Referenties

[1] Dieks, D.: Quantum statistics, identical particles and correlations. Synthese 82: 127-155, 1990. Kluwer academic Publishers.

[2] Hilgevoord, J.: 'Grondslagen van de quantummechanica', syllabus van de vakgroep Geschiedenis en Grondslagen van de Wiskunde en Natuurwetenschappen, Rijksuniversiteit te Utrecht. 6 druk. September 1993, blz 33 t/m 42.

[3] van Fraassen. 1991 'Quantum Mechanics, The Empiricist View' hoofdstuk 11 en 12

[4] Brandsden B.H. en Joachain C.J.: 'Introduction to Quantum Mechanics'. Longman Group UK Limited 1989. hoofdstuk 10

[5] Penrose, R.: 'The Emperor's New Mind'. Oxford University Press 1989. blz. 279

[6] Kaplan, I.G.: 1975.'The Exclusion Principle and Indistinguishability of Identical Particles in Quantum Mechanics', Sov. Phys. Usp. 18, 988.

[7] Sarry, M.F.: 1979 'Permutation Symetry of Wave Functions of a system of Identical Particles', Sov. Phys. JEPT 50,678.