Andrea Lubberdink

Samen met Huygens de kansberekening ontdekken

Gokspelletjes zijn zo oud als de mensheid, maar dat je de kansen op winst of verlies kan berekenen, werd pas ontdekt in de zeventiende eeuw. De avontuurlijke en begrijpelijke geschiedenis van de kansberekening biedt inspirerend materiaal voor in de klas. In *Euclides* 92-3 liet Desiree van den Bogaart dit al zien.
In dit artikel beschrijft Andrea Lubberdink de opzet van een les die zij geeft over Huygens en kansrekening.

Inleiding

De twee vraagstukken uit de geschiedenis die de aanzet hebben gegeven tot het ontstaan van kansberekening zijn niet alleen inhoudelijk geschikt voor in de klas, ook de context is leerzaam en aansprekend. Omdat ik er goede ervaring mee heb, deel ik hier een les die ik geef op het moment dat er (voor de tweede keer) een hoofdstuk over kansberekening begint in de bovenbouw (vwo wiskunde A, C of D)[1].

figuur 1 Vader en zoon Huygens in Voorburg. Foto: Guus Goris

Vader en zoon Huygens

Ik begin de les met een stukje geschiedenis. Ik vertel over Constantijn Huygens (sr.) (1596 – 1687), informatie met plaatjes (makkelijk te vinden op internet) die een indruk geven van hemzelf, de tijd waarin hij leefde, zijn adellijke stand, zijn mede door hemzelf ontworpen huizen in Den Haag en Voorburg en ik laat een kort gedicht van hem zien, bijvoorbeeld *Dromen*, dat als muurgedicht te vinden is in Den Haag. Constantijn Huygens had een zoon, Christiaan Huygens (1629 – 1695), die net als zijn vader zeer getalenteerd was. Hij studeerde (rechten en) wiskunde in Leiden en Breda en hij is vooral beroemd om zijn bijdragen aan de natuurkunde. Hij heeft het slingeruurwerk uitgevonden waardoor men ineens veel nauwkeuriger de tijd kon meten. Hij bouwde zelf steeds betere telescopen waarmee hij nieuwe ontdekkingen deed over planeten en hij ontwikkelde een theorie over licht. Ik laat (nogmaals) een foto van Hofwijck zien, de buitenplaats van vader Huygens, waar Christiaan ook heeft verbleven en dat nu een museum is. Je kunt er dus gaan kijken. Christiaan Huygens is dichtbij.

Figuur 2 Hofwijck te Voorburg. Foto: Guus Goris

Twee vraagstukken uit de gokwereld

In de zeventiende eeuw werd er in hogere kringen veel gegokt met dobbelstenen of kaarten. Er waren twee vraagstukken uit de gokwereld die maar niet opgelost konden worden. Ook grote wiskundigen uit de vijftiende en zestiende eeuw waren er niet uitgekomen. Huygens hoorde erover van twee Franse wiskundigen (Fermat en Pascal), die er met elkaar brieven over hadden geschreven en de vraagstukken hadden opgelost. Huygens kende hun antwoorden, maar niet de berekeningen. Die hadden ze niet naar buiten gebracht.
Huygens raakte geïnteresseerd en ging aan de slag om de vraagstukken zelf te onderzoeken en te doorgronden. Hij kwam op dezelfde antwoorden als de Fransen, maar publiceerde wel zijn inzichten (in 1657 in het Latijn en in 1659/1660 in het Nederlands). Hij schreef daarmee het

allereerste boek over kansberekening. Daarna kwamen er meer boeken en ontwikkelde de kansberekening zich verder. Huygens stond dus aan de basis. Ik laat figuur 3 zien, het begin van het boek[2], en lees de eerste zin voor.[3]


VAN
REKENINGH
IN
SPELEN VAN GELUCK.

Figuur 3 Van Rekeningh in Spelen van Geluk

Ik leg uit wat er staat: *Hoewel het in gokspelen alleen om toeval gaat en de uitkomsten (van een worp met dobbelsteen bijvoorbeeld) onzeker zijn, is er toch iets wat wel met zekerheid bepaald kan worden, namelijk de kans die iemand heeft om te winnen of te verliezen.* Iets is dus niet voorspelbaar maar je kunt er toch aan rekenen. Dat is een bijzonder inzicht. Daar staan we tegenwoordig niet altijd meer bij stil.
In een inleidend gedeelte[4] schrijft Huygens dat zijn verhandeling weliswaar over gokspelen gaat, maar dat dit geen spel is. Men zal gaan inzien dat hier de grondbeginselen gelegd worden voor een belangrijke nieuwe theorie. Huygens begreep dus zelf dat hij iets groots en belangrijks had geschreven dat niet alleen toepasbaar was bij gokspelletjes. De theorie van Huygens is inderdaad al snel toegepast in het verzekeringswezen. We zijn inmiddels benieuwd naar wat die vraagstukken waren. Hier zijn ze:

Partijenvraagstuk

Twee partijen spelen een balspel om punten. Ze hebben beide een even grote kans om een punt te scoren. Er is geen tijdsduur voor het spel vastgelegd en de partij die als eerste 6 punten gescoord heeft, wint de pot van 60 dukaten. Het spel moet (vanwege het weer) bij de stand 5 – 3 worden gestaakt. Er wordt besloten de pot te verdelen. De vraag is nu: hoe moet dat gebeuren?

Dobbelspel

De Méré (een Franse edelman) speelde in de Franse 'salons' vaak een dobbelspel waarbij de 'bank' won als een speler bij het werpen met één zuivere dobbelsteen bij vier worpen ten minste één zes gooit. Hij bedacht daarop een variant waarbij de 'bank' wint wanneer bij 24 worpen met twee zuivere dobbelstenen ten minste één keer dubbel-zes voorkomt. De Méré dacht dat er bij beide situaties voor de 'bank' dezelfde kans op winst bestond: in het eerste geval 4/6 en in het tweede geval 24/36 (want bij twee dobbelstenen zijn er 36 mogelijkheden) en dat is beide hetzelfde. In de praktijk bleek dit echter niet op te gaan, de tweede situatie was voor de 'bank' ongunstig. De vraag was hoe dat kwam.[5]

> "Veelgemaakte denkfouten van leerlingen zijn precies de fouten die in de geschiedenis gemaakt zijn."

Dezelfde fouten als grote wiskundigen

De leerlingen krijgen de opdracht om de rest van het lesuur te gebruiken om in tweetallen de beide vraagstukken op te lossen en de uitwerking stap voor stap duidelijk op te schrijven. De vraagstukken zijn hiervoor precies geschikt qua niveau.
Een interessante factor is dat de veelgemaakte denkfouten van leerlingen (namelijk dat de pot verdeeld moet worden in de verhouding 5 : 3 en dat de kansen bij het dobbelspel 4/6 respectievelijk 24/36 zijn) precies de fouten zijn die in de geschiedenis gemaakt zijn. De denklijn van de leerlingen komt dus overeen met de denklijn van grote wiskundigen in de geschiedenis. Leerlingen kunnen zich daardoor begrepen voelen in hun manier van denken en gemotiveerder proberen om in te zien waarom het fout is en hoe het wel moet.
Bij het partijenvraagstuk helpt het om de leerlingen te vragen of het uit zou maken als de situatie zou zijn geweest dat het spel tot 9 gaat en bij 8 – 6 was afgebroken. Bij het juist oplossen van het partijenvraagstuk komt naar voren hoe handig een kansboom is en bij het dobbelspel komt het nut van de complementregel naar voren. (Huygens zelf kende de kansboom en de complementregel nog niet en had daardoor veel meer woorden en berekeningen nodig dan wij nu.)

>

Interessante uitkomsten in het dobbelspel

In het algemeen zijn de uitkomsten van kansberekeningsopgaven uit het leerboek niet erg interessant, maar de uitkomsten van het dobbelspel zijn dat wel. Die verdienen dus even aandacht. Beide kansen zijn ongeveer gelijk aan 0,5. Waarom moet dat ook wel zo zijn? Hoe zijn ze er vroeger (toen ze nog geen kansen konden berekenen) achter gekomen dat de kansen voor beide partijen ongeveer gelijk waren bij dit spel? Bij het spel met vier worpen is de kans net iets groter dan 0,5 en bij het spel met 24 worpen net iets kleiner. Wat betekent dat voor winst of verlies van de bank op de lange duur? Hoe kan het dat het een tijdje duurde voordat ze erachter kwamen dat het spel met 24 dobbelstenen ongunstig was voor de bank? De leerlingen hebben in deze eerste les kennisgemaakt met veel aspecten van de kansberekening, ook dus met (het verschil tussen) empirische en theoretische kansen.

Uitdagend vraagstuk van Huygens

Voor leerlingen die extra uitdaging aankunnen (en voor onszelf) is het leuk om na te denken over het volgende spel dat Huygens verderop in zijn boek behandelt.
Ik en mijn tegenstander gooien om de beurt met twee dobbelstenen. Mijn tegenstander mag als eerste gooien. Als hij 6 ogen gooit dan wint hij. Als ik 7 ogen gooi, dan win ik. Hoe groot is de kans dat ik win? De oplossing kan volgens de lijn van Huygens als volgt gevonden worden. Stel x is de kans dat ik win en y is de kans dat ik win nadat mijn tegenstander in de eerste beurt geen 6 heeft gegooid. Telkens wanneer ik weer aan de beurt ben om te gooien is mijn kans x en telkens wanneer mijn tegenstander weer aan de beurt is om te gooien is mijn kans y. Kijkend naar een deel van de kansboom vinden we

$$y=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x \text{ en } x=\frac{31}{36}y \Rightarrow x=\frac{31}{61}.$$

De oplossing kan ook gevonden worden met een oneindige kansboom en dus de som van een oneindig aantal termen van een meetkundige rij:

$$\sum_{k=o}^{\infty}\frac{31}{36}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{31}{36}\cdot\frac{5}{6}\right)^k=\frac{\frac{31}{216}-0}{1-\frac{155}{216}}=\frac{31}{61}$$

Ook nu is, niet voor niks, de kans weer ongeveer 0,5.

Vakoverstijgend project

Deze wiskundeles, met aansluitend een hoofdstuk over kansberekening, zou goed als onderdeel van een vakoverstijgend project *Huygens* ingezet kunnen worden, waarin natuurkunde, wiskunde, Nederlands en geschiedenis op een natuurlijke manier samenkomen[6]. Door de originele tekst van Huygens te gebruiken en de concrete vraagstukken wordt de wiskunde bovendien minder abstract en gaan leerlingen wiskunde zien als 'een onderdeel van de wereld'. Dat is voor veel leerlingen prettig en stimulerend.

Noten

[1] De les is voortgekomen uit een opdracht bij het college Historical Aspects of Classroom Mathematics van Steven Wepster (2013).

[2] Uit Francisci van Schooten. Mathematische oeffeningen, begrepen in vijf boecken : ... Waer by gevougt is een Tractaet, handelende van Reeckening in Speelen van Geluck Door d'Heer Christianus Hugenius, blz.489, Amsterdam, 1659. Zie *http://www.fransvanschooten.nl/fvs_boek.htm*

[3] Voor de tekst in een leesbaar lettertype zie *https://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/huygens/1660.pdf* gemaakt door C.J. Verduin, Universiteit Leiden.

[4] Brief aan Van Schooten. Gepubliceerd in het genoemde boek[2], [3], blz. 487

[5] Overgenomen van *http://info.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Onderdelen/Statistiek.html*

[6] Een inspiratiebron hiervoor (vooral voor natuurkunde en wiskunde) kan zijn uit de Zebra reeks: Vermij, R., van Dijk, H. en Reus, C., *Christiaan Huygens*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2004

Over de auteur

Andrea Lubberdink is docent wiskunde op het Utrechts Stedelijk Gymnasium en heeft een achtergrond in de geschiedenis en filosofie van de natuurwetenschappen. Als zelfstandig docent geeft zij bijlessen en trainingen en is ze gastdocent met *Getallendag*, een workshop voor 5 vwo. E-mailadres: *andrea@lublub.nl*